Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie – Lösung 4

Aufgabe 12.

(a) Wir verwenden bei diesem Integranden die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i}.$$

Damit ergibt sich mit der Cauchyschen Integralformel

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\,dz = \int_{|z|=2} \frac{iz^3/2}{z+i}\,dz - \int_{|z|=2} \frac{iz^3/2}{z-i}\,dz = -2\pi i.$$

(b) Wir setzen $f(z) = e^{2z}$ und erhalten mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz = 2\pi i \frac{f^{(3)}(-1)}{3!} = \frac{8\pi i}{3e^2}.$$

(c) Setzt man $f(z) = ze^{iz}$, so ist $f''(z) = (2i-z)e^{iz}$ und man erhält mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen

$$\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}\,dz = 2\pi i \frac{f''(\pi)}{2!} = 2\pi + i\pi^2.$$

(d) Die Nullstelle $z_0 = 7$ des Nenners des Integranden liegt außerhalb der Kreislinie $|z-2| = 3$. Der Integrand ist holomorph auf dem konvexen Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z-2| < 5\}$, in welchem auch der Integrationsweg verläuft. Als Folge des Cauchyschen Integralsatzes verschwindet das Integral.

Aufgabe 13.

Es sei $\alpha_1 = \alpha|_{[0,2\pi]}$ und $\alpha_2 = \alpha|_{[2\pi,4\pi]}$. Dann gilt

$$\int_\alpha \frac{1}{1-z^2}\,dz = \int_{\alpha_1} \frac{1}{(1-z)(1+z)}\,dz + \int_{\alpha_2} \frac{1}{(1-z)(1+z)}\,dz = -2\pi i.$$

Aufgabe 14.

"$\Longrightarrow$": Sei f bei $z_0 = 0$ komplex differenzierbar. Dann kann f bei 0 komplex linear approximiert werden, besitzt also eine Darstellung der Form

$$f(r\,e^{i\varphi}) = f(0) + f'(0)r\,e^{i\varphi} + g(r\,e^{i\varphi}) \quad \text{mit} \quad \frac{g(r\,e^{i\varphi})}{r} \to 0 \ \text{ für } r \to 0 .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi r^2}\int_{|z|=r} f(z)\,dz &= \frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi} f(r\,e^{i\varphi}) ir\,e^{i\varphi}\,d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi} \left[f(0) + f'(0)r\,e^{i\varphi} + g(r\,e^{i\varphi})\right] ir\,e^{i\varphi}\,d\varphi \\ &= 0 + 0 + \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\,\frac{g(r\,e^{i\varphi})}{r}\,d\varphi \ \to\ 0 \quad \text{für } r \to 0 . \end{aligned} \tag{12}$$

"$\Longleftarrow$": Nach Voraussetzung sind u und v stetig partiell, also auch reell total differenzierbar. Also gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= u(z) + iv(z) \\ &= \left[u(0) + u_x(0)x + u_y(0)y + g_1(z)\right] + i\left[v(0) + v_x(0)x + v_y(0)y + g_2(z)\right] \end{aligned} \tag{13}$$

mit $\dfrac{g_j(z)}{|z|} \to 0$ für $z \to 0$. Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi r^2}\int_{|z|=r} f(z)\,dz &= \frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi} ir\,e^{i\varphi}\left[u(0) + iv(0) + r\cos\varphi\,(u_x(0) + iv_x(0)) + \right. \\ &\qquad \left. + r\sin\varphi\,(u_y(0) + iv_y(0)) + g_1(z) + ig_2(z)\right] d\varphi \\ &= \frac{i}{\pi}\left[f_x(0)\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,e^{i\varphi}\,d\varphi + f_y(0)\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,e^{i\varphi}\,d\varphi\right] \\ &\qquad + \frac{i}{\pi r}\int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\left(g_1(z) + ig_2(z)\right) d\varphi \\ &= \frac{i}{\pi}\left[\pi f_x(0) + i\pi f_y(0)\right] + \frac{i}{\pi r}\int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\left(g_1(z) + ig_2(z)\right) d\varphi \\ &\to\ if_x(0) - f_y(0) \quad \text{für } r \to 0 . \end{aligned} \tag{14}$$

Aber nach Voraussetzung geht das Integral gegen 0 für $r \to 0$. Es folgt

$$0 = if_x(0) - f_y(0) = -v_x(0) - u_y(0) + i\left(u_x(0) - v_y(0)\right) . \tag{15}$$

Also erfüllt f in 0 die Cauchy-Riemann-Dgln $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.

Da f nach Voraussetzung in einer Umgebung von 0 stetig partiell differenzierbar ist, ist f in 0 komplex differenzierbar.

Aufgabe 15.

Wir betrachen die Hilfsfunktion $g = \exp\circ f$. Als Verkettung ganzer Funktionen ist g ebenfalls ganz. Ferner ist g beschränkt, denn

$$|g| = |e^{\mathrm{Re}\, f + i\,\mathrm{Im}\, f}| = \underbrace{|e^{\mathrm{Re}\, f}|}_{\le e^M}\underbrace{|e^{i\,\mathrm{Im}\, f}|}_{=1} \le e^M.$$

Mit dem Satz von Liouville folgert man, dass g konstant ist. Es gilt also $g' = 0$ und da $g' = f'\exp(f)$ gilt, folgt $f' = 0$ und damit die Behauptung.