Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie – Lösung 5

Aufgabe 16.

(a) Aus $f(z) = f(-z)$ folgt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (-z)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (-1)^\nu z^\nu .$$

Es muss gelten $a_\nu = (-1)^\nu a_\nu$ für alle ν und somit $a_\nu = 0$ für ν ungerade.

(b) Die Cosinusreihe $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} z^{2\nu}$ leistet das Gewünschte.

Aufgabe 17.

(a) Wir betrachten die Partialbruchzerlegung des Ausdrucks:

$$\frac{1}{z^2 - 5z + 6} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$$

Wir entwickeln die beiden Summanden mit Hilfe der geometrischen Reihe und erhalten

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^\nu \quad \text{und} \quad \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu .$$

Damit gilt

$$\frac{1}{z^2 - 5z + 6} = -\frac{1}{3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^\nu + \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{6} \left[3 \left(\frac{1}{2}\right)^\nu - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^\nu \right] z^\nu .$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist 2 .
Für den zweiten Ausdruck gilt

$$\frac{1}{(z-i)^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-i}\right)'' .$$

Weiterhin ist

$$\frac{1}{z-i} = \frac{i}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2i}(z+i)} = \frac{i}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{2}\right)^\nu (z+i)^\nu .$$

Wir erhalten duch Differenzieren der Reihe

$$\frac{1}{z-i} = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{i}{4} \left(\frac{-i}{2}\right)^\nu (\nu^2 - \nu)(z+i)^{\nu-2} .$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist 2 .

(b) Es gilt für alle $z \in U(0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} |z|^{\nu!} \leq \sum_{\nu=0}^{n} |z|^\nu$.
Weil die geometrische Reihe $\sum q^\nu$ absolut konvergiert für $|q| < 1$, hat die Reihe $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} |z|^{\nu!}$ einen Konvergenzradius $\rho \geq 1$. Für $z = 1$ divergiert die Reihe, also ist der Konvergenzradius $\rho = 1$.

Ist $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$, so gilt $\left(e^{2\pi i\alpha}\right)^{\nu!} = e^{2\pi i(\frac{m}{n}\nu!)}$ und für $\nu \geq n$ ist $\frac{m}{n}\nu! \in \mathbb{Z}$. Damit ist $\left(e^{2\pi i\alpha}\right)^{\nu!} = 1$ für $\nu \geq n$ und folglich

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} |f(re^{2\pi i\alpha})| = \lim_{\cdots} \left|\sum_{\nu=0}^{n-1} r^{\nu!}e^{2\pi i\frac{m}{n}\nu!} + \sum_{\nu=n}^{\infty} r^{\nu!}\right| = \infty.$$

Aufgabe 18.

Ist die Funktion f ein Polynom mit Grad $\leqslant n$, gilt also

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

und setzt man $b := |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$, so folgt für $|z| \geqslant 1$ die Abschätzung

$$|f(z)| \leqslant |a_0| + |a_1 z| + \cdots + |a_n z^n| \leqslant |a_0| \cdot |z|^n + \cdots + |a_n| \cdot |z|^n = b|z|^n .$$

Wegen der Stetigkeit von f ist zudem $a := \max_{|z|\leqslant 1}|f(z)| < \infty$. Wir haben damit

$$|f(z)| \leqslant a \quad \text{für } |z| \leqslant 1 \qquad \text{und} \qquad |f(z)| \leqslant b|z|^n \quad \text{für } |z| \geqslant 1 .$$

Insbesondere folgt dann $|f(z)| \leqslant a + b|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Nun nehmen wir umgekehrt an, dass eine derartige Abschätzung gilt. Die Cauchysche Integralformel für Ableitungen liefert für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $r > 0$

$$f^{(m)}(0) = \frac{m!}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-0)^{m+1}}\, dz .$$

Für $|z| = r$ gilt die Abschätzung

$$\left|\frac{f(z)}{(z-0)^{m+1}}\right| \leqslant \frac{a + b|z|^n}{|z|^{m+1}} = \frac{a + br^n}{r^{m+1}} .$$

Da die Kreislinie $|z| = r$ die Länge $2\pi r$ hat, ergibt sich

$$|f^{(m)}(0)| \leqslant \frac{m!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{a + br^n}{r^{m+1}} = \frac{ar + br^{n+1}}{r^{m+1}/m!} \xrightarrow{r\to\infty} 0 \qquad \text{für } m > n .$$

Das bedeutet, dass $f^{(m)}(0) = 0$ für $m > n$ gilt; die Potenzreihenentwicklung von f um den Punkt 0 enthält also nur Potenzen $\leqslant n$, d. h. f ist ein Polynom mit Grad $\leqslant n$.

Aufgabe 19.

Für $z, \omega \in U(0, 2/3)$ ist

$$|z^{k-1} + z^{k-2}\omega + \cdots + z\omega^{k-2} + \omega^{k-1}| \leq k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(\omega)| &= |z-\omega|\left|1 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}(z^{k-1} + z^{k-2}\omega + \cdots + z\omega^{k-2} + \omega^{k-1})\right| \\
&\geq |z-\omega|\left|1 - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2/3)^k}{k}\right| \geq |z-\omega|\left|1 - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k\right| \\
&\geq |z-\omega||1 - \frac{2}{3}| = \frac{1}{3}|z-\omega|.
\end{aligned}$$

Also ist $f(z) \neq f(\omega)$ für $z \neq \omega$.