Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Lösung 6

Aufgabe 20.

(a) Die Aussage folgt aus dem Satz von der Gebietstreue. Ist $|f|$ auf D konstant, so bedeutet dies, dass Bild f auf einer Kreislinie liegt. Jedoch enthält keine solche Kreislinie eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und somit muss f konstant sein, weil sich sonst ein Widerspruch zum Satz von der Gebietstreue ergibt.

(b) Sei f holomorph auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ und sei $a \in D$ so, dass $|f|$ in a ein lokales Maximum annimmt. Es ist zu zeigen, dass f konstant auf D ist.
Wir wählen $R > 0$ hinreichend klein, sodass $\overline{U(a,R)} \subset D$ gilt. Des Weiteren sei R so gewählt, dass $|f(z)| \leq |f(a)|$ für alle $z \in D$ mit $|z-a| \leq R$ gilt.
Für beliebiges $0 < r \leq R$ erhalten wir aus der Cauchy Integralformel

$$\begin{aligned}
|f(a)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z-a|=r} \left| \frac{f(z)}{z-a} \right| dz \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} 2\pi r \max\{|f(z)|\,;\, |z-a| = r\} \\
&= \max\{|f(z)|\,;\, |z-a| = r\} \leq |f(a)|.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also, dass $|f(a)|$ das Maximum von $|f(z)|$ auf jedem der Kreisringe $|z-a| = r$ für $0 < r \leq R$ ist. Mit der Stetigkeit von $|f|$ folgert man daraus, dass $|f|$ auf $\overline{U(a,R)} \subset D$ konstant ist. Mit (a) folgt die Behauptung.

Aufgabe 21.

(a) Gilt $|f(z) - a| > \varepsilon \ \forall\, z \in \mathbb{C}$, so ist $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - a}$ eine beschränkte ganze Funktion, also konstant nach Liouville.
$\Longrightarrow$ f ist konstant. $\square$

(b) Angenommen f ist nicht konstant. Dann ist $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$, insbesondere enthält $f(\mathbb{C})$ Punkte z_i, $i = 1,2$ mit $\operatorname{Im} z_1 > 0$ und mit $\operatorname{Im} z_2 < 0$.
Weil $\mathbb{C}$ zusammenhängend und f stetig ist, ist $f(\mathbb{C})$ zusammenhängend. Daraus folgt ein Widerspruch.

Aufgabe 22.
Ist $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ die Taylorentwicklung, so gilt $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.
Daher gilt $\mathbb{C} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$ mit $D_n = \{z\,;\, f^{(n)}(z) = 0\}$.
Dann ist $\overline{\mathbb{E}}$ abzählbare Vereinigung der Mengen $D_n \cap \overline{\mathbb{E}}$, $n \in \mathbb{N}$.
Weil $\overline{\mathbb{E}}$ überabzählbar viele Elemente enthält, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $D_n \cap \overline{\mathbb{E}}$ (überabzählbar) unendlich viele Elemente enthält.
Weil $\overline{\mathbb{E}}$ kompakt ist, hat für dieses n $D_n \cap \overline{\mathbb{E}}$ einen Häufungspunkt.
Nach dem Identitätssatz ist somit die holomorphe Funktion $f^{(n)}$ konstant. Daraus folgt f ist ein Polynom.

Aufgabe 23.
Man betrachtet $D = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$. Dann ist $\partial D = \mathbb{R}$ und $|\sin(z)| \leq 1 \ \forall\, z \in \mathbb{R}$.
Nun gilt aber $\sin x = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.
Mit $z = it$, $t \in \mathbb{R}^{>0}$, erhält man aber $|\sin it| = \dfrac{1}{2}\left|e^{-t} - e^{t}\right| \stackrel{t \to \infty}{\longrightarrow} \infty$.