Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Lösung 7

Aufgabe 24.

Angenommen f ist holomorph. Dann hat f nur endlich viele Nullstellen:
Dann wählt man in der Voraussetzung $S = 1$, so findet man ein $\rho > 0$ mit $|f(z)| \geq 1$ für alle $z \in D$ mit $d(z, \partial D) = \min(|z-w|, \forall w \in \partial D) \leq \rho$.
Nun ist $D' = \{z \in D; d(z, \partial D) \geq \rho\} = \bigcap_{w \in \partial D} \{z \in D; |z-w| \geq \rho\}$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$, denn jede der Mengen $\{z \in D; |z-w| \geq \rho\}$ ist abgeschlossen.
Weil D' beschränkt ist, ist D' also kompakt.
Nun hat wegen $|f(z)| \geq 1$ für alle $z \in D - D'$ die Funktion f nur Nullstellen in D'.
Hätte f unendlich viele Nullstellen, darunter $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \in D'$, so würde die Kompaktheit von D' implizieren, dass die Folge (z_n) einen Häufungspunkt hat. Nach dem Identitätssatz würde folgen $f = 0$.
Daraus folgt, f hat nur endlich viele Nullstellen $z_1, \ldots, z_n \in D$.
Die Potenzreihenentwicklung von f in jedem der Punkte z_i habe die Form

$$f(z) = (z - z_i)^{n_i} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,i} (z - z_i)^m$$

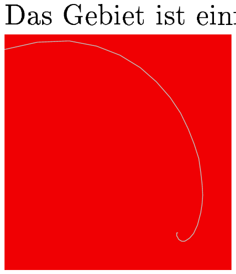
mit $a_{0,i} \neq 0$.
Dann hat die Funktion $g(z) = \dfrac{f(z)}{\prod_{i=1}^{n} (z - z_i)^{n_i}}$ keine Nullstelle.
Ferner erfüllt die Funktion die Voraussetzung für alle $S > 0$ existiert ein $\rho > 0$ mit $|g(z)| \geq S$ für alle $z \in D$ mit $d(z, \partial D) \leq \rho$. Denn $\left| \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n} (z - z_i)^{n_i}} \right|$ ist beschränkt auf der Menge $\{z \in D, d(z, \partial D) < d(z_i, \partial D) - \varepsilon \quad \forall i = 1, \ldots, n\}$ für ein beliebiges $0 < \varepsilon < d(z_i, \partial D)$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Der Quotient $\dfrac{1}{g} : D \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion.
Weil nach Voraussetzung gilt: Für alle $S > 0$ existiert ein $\rho > 0$ mit $\left|\frac{1}{g(z)}\right| \leq S$ für alle $z \in D$ mit $d(z, \partial D) < \rho$, hat $\frac{1}{g}$ eine stetige Fortsetzung $\left(\frac{1}{g}\right)^{\sim} : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\left(\frac{1}{g}\right)^{\sim}(z) = 0$ für alle $z \in \partial D$.

Nun kann man das Maximumprinzip anwenden und erhält $\left(\frac{1}{g}\right)^{\sim} = 0$. Das ist ein Widerspruch.

Aufgabe 25.

(a) Das Gebiet ist einfach zusammenhängend und hat folgende Gestalt:



(b) Die Menge D ist offen und einfach zusammenhängend, also besitzt jede auf D holomorphe Funktion eine Stammfunktion.

(c) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f'(z) = 1/z$. Die Funktion $\operatorname{Log} : \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ erfüllt $\operatorname{Log}'(z) = 1/z$. Daher unterscheiden sich f und Log auf dem reellen Intervall $(1, e)$ nur um eine Konstante.

Aufgabe 26.

Es gilt
$$\begin{aligned}
\chi(g \circ \gamma\,, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{g\circ\gamma} \frac{d\omega}{\omega} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^1 \frac{1}{g(\gamma(t))}\, (g(\gamma(t))'\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^1 \frac{1}{(\gamma(t))^m} \cdot m \cdot (\gamma(t))^{(m-1)} \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \frac{m}{2\pi i} \int\limits_0^1 \frac{1}{\gamma(t)}\, \gamma'(t)\, dt \\
&= m \cdot \chi(\gamma\,, 0) \quad .
\end{aligned}$$
□

Aufgabe 27.

Zur Erinnerung:

Eine Homotopie $H : [0,1]^2 \to D$ zwischen $\gamma_0 : [0,1] \to D\,, \gamma_1 : [0,1] \to D \ \in M$ ist eine stetige Abbildung mit $\gamma|_{\{0\}\times[0,1]} = \gamma_0 \ , \ \gamma|_{\{1\}\times[0,1]} = \gamma_1$ und $\gamma([0,1] \times \{0,1\}) = z_0$.

(a) Es seien $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in M$ beliebig

(i) $\gamma_0 \sim \gamma_0 \ , \ H : [0,1]^2 \to D$
$H|_{(s,t)} = \gamma_0(t)$ ist die gewünschte Homotopie.

(ii) $\gamma_0 \sim \gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_0$: Erfüllt $H : [0,1]^2 \to D$
$H|_{\{0\}\times[0,1]} = \gamma_0 \ , \ H|_{\{1\}\times[0,1]} = \gamma_1$, so definiert $H' : [0,1]^2 \to D$
$H'|_{(s,t)} = H(1-s,t)$ ist die gewünschte Homotopie.

(iii) $\gamma_0 \sim \gamma_1, \gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_0 \sim \gamma_1$:
Seien H_1, H_2 Homotopien mit $H_1|_{\{0\}\times[0,1]} = \gamma_0 \ , \ H_1|_{\{1\}\times[0,1]} = \gamma_1$
$H_2|_{\{0\}\times[0,1]} = \gamma_1 \ , \ H_1|_{\{1\}\times[0,1]} = \gamma_2$

Dann ist $H_3 = \begin{cases} H_1(2s,t) & , \ S \in [0, \frac{1}{2}] \ , \ t \in [0,1] \\ H_2(2s-1,t) & , \ S \in [\frac{1}{2}, 1] \ , \ t \in [0,1] \end{cases}$

Die gewünschte Homotopie

(b) Es seien $H_1 : [0,1]^2 \to D\,, H_2 : [0,1]^2 \to D$ Homotopien mit
$H_1|_{\{0\}\times[0,1]} = \gamma_1 \ , \ H_1|_{\{1\}\times[0,1]} = \gamma_1'$
$H_2|_{\{0\}\times[0,1]} = \gamma_2 \ , \ H_2|_{\{1\}\times[0,1]} = \gamma_2'$
Dann definiert $H : [0,1]^2 \to D$ mit $H(s,*) = H_1(s,*) \circ H_2(s,*)$ für feste $s \in [o,1]$ eine Homotopie mit $H|_{\{0\}\times[0,1]} = \gamma_1 \circ \gamma_2\,, \ H|_{\{0\}\times[0,1]} = \gamma_1' \circ \gamma_2'$.

(c) Neutrales Element $1 \in \pi_1(D, z_0)$
Inverses Element zu $\overline{\gamma} \in \pi_1(D, z_0)$ mit Stellvertreter $\gamma \in M$ (d.h. die Äquivalenzklasse von γ ist $\overline{\gamma}$) ist $\overline{\gamma}^{-1}$ mit Stellvertreter $\gamma^{-1} \in M$ definiert durch $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$ für alle $t \in [o,1]$.

(d) Ist D einfach zusammenhängend, so ist sicherlich $\pi_1(D, x_0) = \{1\}$ (triviale Gruppe)
Andersherum gelte für das Gebiet $\pi_1(D, z_0) = \{1\}$.
Es seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to D$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)\,, \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$.

Die Kurve $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}$ hat gleichen Anfangs- und Endpunkt.
Ohne Einschränkung nehmen wir an, dieser sei z_0 .
Dann ist $\gamma \sim 1$, sei also $H : [0,1]^2 \to D$ eine Homotopie mit $H|_{\{0\}\times[0,1]} = \gamma$ und $H|_{\{1\}\times[0,1]} = 1$.
Dann ist mit $\varphi : [0,1] \to \partial([0,1]^2)$

$$s \mapsto \begin{cases} (0,4s) & , \quad 0 \le 4s \le 1 \\ (2s - \frac{1}{2}, 1) & , \quad 1 \le 4s \le 3 \\ (1, 4-4s) & , \quad 3 \le 4s \le 4 \end{cases}$$

Dann ist $G : [0,1]^2 \to D$
$G(s,t) = H\Big((1-t)\varphi(s) + t(\frac{1}{2}, 0)$ die gewünschte Homotopie.

(e) Es sei nun $D = \mathbb{C} - \{z_1\}$.
Ohne Einschränkung seien $z_0 = 1$ und $z_1 = 0$. Dann ist jeder Weg γ homotop zu einem Weg $\gamma : [0,1] \to S^1$.
Ist γ ein solcher Weg und $f : \mathbb{R} \to S^1$ mit $s \to e^{2\pi i s}$, so existiert ein eindeutiger Weg $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$, $\widetilde{\gamma}(0) = 0$
Denn zu jedem Punkt $s \in \mathbb{R}$ existiert eine Umgebung $U \ni s$, so dass $f|_U : U \to f(U)$ ein Homeomorphismus ist. Da nun für alle $t \in [0,1]$ eine Umgebung $V \ni t$ existiert mit $\gamma(V) \subset f \subset U$, definiert man $\widetilde{\gamma}|_V = (f|_V)^{-1} \circ \gamma|_V$.

Da die $\widetilde{\gamma}|_V$ bis auf ganze Zahlen eindeutig sind, gilt $(\widetilde{\gamma}|_{V_1})\Big|_{V_1 \cap V_2} - (\widetilde{\gamma}|_{V_2})\Big|_{V_1 \cap V_2} \in \mathbb{Z}$.

Wegen $\widetilde{\gamma}(0) = 0$ erhält man durch "Verkleben" die Abbildung $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$.
Dann ist $\widetilde{\gamma}$ homotop zu der Strecke $[0, \widetilde{\gamma}(1)]$, wobei $0 = \widetilde{\gamma}(0)$ gilt ($\mathbb{R}$ ist konvex).
Wegen $f \circ \widetilde{\gamma}(1) = \gamma(1) = 1$, folgt aber $\widetilde{\gamma}(1) = k \in \mathbb{Z}$. Daher ist γ homotop zu $\gamma_k : [0,1] \to D$, $\gamma_k(t) = e^{2\pi i k t}$. Der Gruppenisomorphismus ist also $\varphi : \pi_1(D, 0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z},\ \widetilde{\gamma}_k \longmapsto h$.