Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Lösung 8

Aufgabe 28.

(a) Die allgemeine Potenz ist mehrdeutig. Die möglichen Werte von $a^b (a \neq 0)$ sind

$$a^b \;=\; e^{b \log a} \;=\; e^{b(\operatorname{Log} a + 2k\pi i)} \quad (k \in \mathbb{Z}) \,.$$

Dabei ist $\operatorname{Log} a = \log|a| + i \operatorname{Arg} a$ der Hauptwert des Logarithmus von a mit $-\pi < \operatorname{Arg} a \leq \pi$. Nur für $b \in \mathbb{Z}$ ist a^b eindeutig definiert.

Die möglichen Werte von a^{bc} sind $\exp[bc \operatorname{Log} a + bc2k\pi i], \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Die möglichen Werte von $(a^b)^c$ sind $\exp[bc \operatorname{Log} a + bc2k\pi i + c2l\pi i], \quad (k, l \in \mathbb{Z})$.

Also ist jeder Wert von a^{bc} auch einer von $(a^b)^c$, aber nicht umgekehrt. Nur für $c \in \mathbb{Z}$ stimmen die Wertemengen überein.

(b) Der Fehler steckt im 2. und 4. Gleichheitszeichen:

$$e^{ix} \;=\; \exp\left(2\pi i \frac{x}{2\pi}\right) \;\stackrel{?}{=}\; (e^{2\pi i})^{x/2\pi} \;=\; 1^{x/2\pi} \;\stackrel{?}{=}\; 1 \;.$$

Die allgemeine Potenz ist mehrdeutig. Es ist

$$a^b \;=\; e^{b \log a} \;=\; e^{b(\operatorname{Log} a + 2k\pi i)} \quad (k \in \mathbb{Z}) \,.$$

Deshalb ist zwar jeder Wert von a^{bc} auch einer von $(a^b)^c$, aber nicht umgekehrt. Und 1 ist nur einer der möglichen Werte von 1^z .

Aufgabe 29.

Sei f in dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei. Angenommen f besitzt einen Logarithmus g , also eine in G holomorphe Funktion $g(z)$ mit $e^g = f$. Dann folgt:

$$f'(z) \;=\; \left(e^{g(z)}\right)' \;=\; g'(z)\, e^{g(z)} \;=\; g'(z)\, f(z) \;.$$

Also ist $g'(z) = f'(z)/f(z)$, d.h. g ist Stammfunktion von f'/f .

Sei umgekehrt $F(z)$ eine Stammfunktion von f'/f in G und $h(z) := e^{F(z)}$. Dann ist h auf G holomorph und nullstellenfrei.

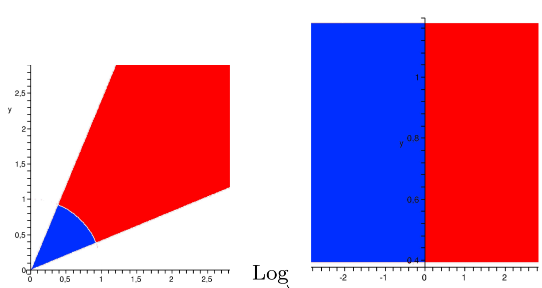
Es gilt $h'(z) = F'(z)\, e^{F(z)} = F'(z)\, h(z)$ und daher

$$\left(\frac{f(z)}{h(z)}\right)' \;=\; \frac{f'h - h'f}{h^2} \;=\; \frac{F'\, fh - F'\, hf}{h^2} \;\equiv\; 0 \;.$$

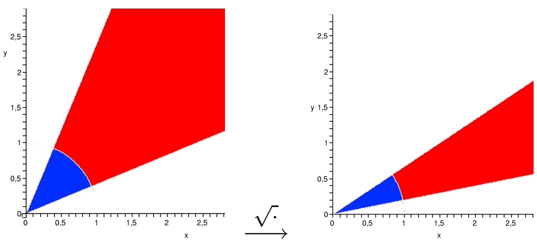
Also ist f/h konstant. Mit $f/h \;\equiv\; c$ folgt $f(z) \;=\; c \cdot h(z) \;=\; e^{F(z) + \log c}$, d.h. $g(z) := F(z) + \log c$ ist Logarithmus von f in G .

Aufgabe 30.

(a)



(b)



Aufgabe 31.

(a) Es existiert ein Weg $\gamma : [0,1] \to G$ mit $\chi(0,\gamma) \neq 0$.
Dann sind $K = \{z \in \mathbb{C} - G\,,\, \chi(z,\gamma) \neq 0\}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit $0 \in K$ und $A = \{z \in \mathbb{C} - G\,,\, \chi(z,\gamma) = 0\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$.
Wegen $G \cup K = \mathbb{C} - A$ ist $G \cup K$ offen.
In $G - K$ existiert ein geschlossener Polygonzug. Dieser ist nicht notwendig frei von Selbstüberschneidungen. Durch Elimination von Schleifen mit Umlaufzahl 0 und Auswahl von Schleifen mit Umlaufzahl $\chi \neq 0$ können wir aus obigem Polygonzug ein einfach geschlossenes Teilpolygon auswählen. Ferner existiert eine Homotopie, die diesen Polygonzug in eine glatte Kurve verwandelt. Auf die so erhaltene Kurve wenden wir den Umlaufsatz von Hopf an.

(b) Ist $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ z \mapsto z^m$, so ist $g \circ f \circ \gamma = \gamma$.
Insbesondere ist also $\chi(g \circ f \circ \gamma\,,\, 0) = 1$. Andererseits ist aber

$$\begin{aligned}
\chi(g \circ f \circ \gamma\,,\, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{g\circ f\circ\gamma} \frac{d\omega}{\omega} \\
&= \int\limits_0^1 \frac{1}{g(f(\gamma(t)))}\; g(f(\gamma(t)))'\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^1 \frac{m\, f(\gamma(t))^{(m-1)}}{f(\gamma(t))^m}\; \Big(f(\gamma(t))\Big)'\, dt \\
&= m \cdot \chi(f \circ \gamma\,,\, 0)
\end{aligned}$$

Nun ist $\chi(f \circ \gamma\,,\, 0) \in \mathbb{Z}$ und $|m| \geq 2 \Rightarrow \big|\chi(g \circ f \circ \gamma\,,\, 0)\big| \geq 2$