Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Lösung 9

Aufgabe 32.

(a) Es gilt

$$f(z) = \frac{3}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1}.$$

Mit Hilfe der geometrichen Reihe entwickelt man die beiden Summanden:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{-1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n}$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n$$

Daraus ergibt sich die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n}.$$

(b) Für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z-3)^2}$$

erhalten wir die Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{1}{9z} + \frac{1}{3(z-3)^2} - \frac{1}{9(z-3)}.$$

Wir entwickeln zunächst

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{-1}{z-1}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(z-1)^n}$$

und

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} (z-1)^n.$$

Ferner ist

$$\left(\frac{1}{z-3}\right)' = -\frac{1}{(z-3)^2}.$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{1}{(z-3)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} (n+1)(z-1)^n$$

und somit die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{9} \frac{1}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{n+1}{6} + \frac{1}{9}\right) (z-1)^n.$$

Aufgabe 33.

(a) Das Konvergenzgebiet ist $\{ z \in \mathbb{C}\,;\, 1/2 < |z| < 2 \}$.

(b) Das Konvergenzgebiet ist $\{ z \in \mathbb{C}\,;\, 1 < |z-1| < 3 \}$.

Aufgabe 34.

(a) Es ist

$$f(z) = \frac{z^3+3z+2i}{z^2+1} = \frac{z^3+3z+2i}{(z+i)(z-i)}.$$

Ferner verschwindet der Zähler an der Stelle $z_0 = -i$, folglich ist die Singularität hebbar. Es gilt $z^3+3z+2i = (z+i)(z^2-iz+2)$ und daher

$$\lim_{z\to -i} f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{z^2-iz+2}{z-i} = 0.$$

(b) Wir betrachten

$$f(z) = \frac{1}{1-e^z} = -\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = -\frac{1}{z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}}.$$

Es gilt

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \right)^{-1} = 1 + O(z).$$

Folglich besitzt f in 0 einen Pol der Ordnung 1 . Der Hauptteil der zugehörigen Laurentreihe ist $-1/z$.

(c) Wir nutzen die bekannte Reihendarstellung des $\cos$ aus und erhalten

$$f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^4} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} - 1}{z^4} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) z^2 + O(z^4)}{z^4} = -\frac{1}{2z^2} + O(1)$$

Also besitzt f in 0 einen Pol der Ordnung 2 mit Hauptteil $-1/(2z^2)$.

(d) Die Funktion

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{z^2+1}\right)$$

hat eine wesentliche Singularität in $z_0 = i$. Dazu betrachte man die Folgen

$$a_n = i\sqrt{1-\frac{1}{n}} \text{ und } b_n = i\sqrt{1-\frac{2}{n}},\ n \geq 2.$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = i,$$

aber

$$f(a_n) = \sin(-n\pi) = 0 \text{ und } f(b_n) = \sin\left(-\frac{n}{2}\pi\right) \neq 0.$$

Der Grenzwert $\lim_{z\to i} f(z)$ existiert nicht und es gilt auch nicht $\lim_{z\to i} f(z) = \infty$. Es folgt, dass f an der Stelle $z_0 = i$ eine wesentliche Singularität besitzt.

Aufgabe 35.

Angenommen, es gelte $\lim_{r\to 0} r^k M(r) \neq \infty$. Dann existiert eine Konstante $K > 0$ und eine Folge von Radien $r_1 > r_2 > \cdots$ mit $r_n \to 0^+$ mit $r_n^k M(r_n) \leq K$.

Nach dem Maximumprinzip gilt dann $|z - z_0|^k |f(z)| \leq K$ für alle z aus den Kreisringen $A_n := \{\, z \,;\, r_{n+1} \leq |z - z_0| \leq r_n \,\}$.

Also ist $(z - z_0)^k f(z)$ in einer gelochten Umgebung von z_0 beschränkt und kann holomorph fortgesetzt werden. Dann hat f in z_0 aber höchstens einen Pol der Ordnung k . Dies ist ein Widerspruch.

Aufgabe 36.

Sei $(x_m) \subset \mathbb{C}$ eine Folge, für die gilt $f(x_m) \to c \in \mathbb{C}$ und sei $(y_m) \subset \mathbb{C}$ eine Folge, für die gilt $f(y_m) \to \infty$. Solche Folgen können nach dem Satz von Casorati-Weierstraß gewählt werden.

Da die Funktionen a_i holomorph sind, folgt, dass $g(x_m)$ gegen einen Grenzwert aus $\mathbb{C}$ konvergiert. Dagegen gilt für die Folge (y_m)

$$\lim_{m\to\infty} |g(y_m)| = \lim \left| f^n(y_m) \left(1 + \frac{a_1(y_m)}{f(y_m)} + \cdots + \frac{a_n(y_m)}{f^n(y_m)} \right) \right| = \infty.$$

Folglich ist die Singularität in z_0 eine wesentliche.

Zum Beweis der zweiten Aussage sei k die höchste in z_0 auftretende Polordnung der meromorphen Funktionen a_i . OBdA können wir annehmen, dass $a_n = 0$ gilt, denn ist a_n eine meromorphe Funktion und $g - a_n$ eine Funktion mit wesentlicher Singularität, so ist auch g eine Funktion mit wesentlicher Singularität.

Man definiert $f_1 = f/(z - z_0)^k$ und $f_2 = f(z - z_0)^k$. Dann besitzt sowohl f_1 als auch f_2 eine wesentliche Singularität in z_0 . Wieder können wir zwei Folgen (x_m) und (y_m) wählen mit $f_1(x_m) \to c \in \mathbb{C}$ und $f_2(y_m) \to \infty$.

Weil $(f_1(x_m))$ gegen einen Grenzwert in $\mathbb{C}$ konvergiert, besitzt auch die Folge $(f(x_m))$ einen Grenzwert in $\mathbb{C}$. Folglich ist

$$\lim_{m\to\infty} |g(x_m)| = \lim_{m\to\infty} \left| f_1^n(x_m) \left((x_m - z_0)^{kn} + \frac{a_1(x_m - z_0)^{k(n-1)}}{f_1(x_m)} + \cdots + \frac{a_{n-1}(x_m - z_0)^k}{f_1^{n-1}(x_m)} \right) \right| < \infty.$$

Wegen $f_2(y_m) \to \infty$ folgt auch $f(y_m) \to \infty$. Wie vorher zeigt man

$$\lim_{m\to\infty} |g(y_m)| = \lim \left| f^n(y_m) \left(1 + \frac{a_1(y_m)(y_m - z_0)^k}{f_2(y_m)} + \cdots + \frac{a_{n-1}(y_m)(y_m - z_0)^{k(n-1)}}{f_2^{n-1}(y_m)} \right) \right| = \infty.$$