Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Lösung 10

Aufgabe 37.

Zunächst überlegen wir uns, wie wir die Residuen an Polstellen m -ter Ordnung berechnen können. Dafür gilt folgende Formel:

$$\operatorname{res}_a f(z) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}((z-a)^m f(z))$$

Die Richtigkeit dieser Formel überprüft man mit der Laurentreihe von f .

(a) Mit obiger Formel erhalten wir $\operatorname{res}_{-1} f(z) = 2/2! = 1$.

(b) Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}.$$

Folglich ist $\operatorname{res}_i f(z) = 12/(2i)^5 \cdot 1/2! = -3i/16$ und $\operatorname{res}_{-i} f(z) = 3i/16$.

(c) $\operatorname{res}_1 f(z) = e$

(d) Es gilt

$$e^{1/(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(-1)^n(z-1)^n}.$$

Mit $z = 1 + (z-1)$ ergibt sich

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(-1)^n(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(-1)^n(z-1)^{n-1}}$$

und somit $\operatorname{res}_1 f(z) = -1 + 1/2 = -1/2$.

(e) Es ist

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)(z-1)^2}.$$

Wieder benutzen wir obige Formel und erhalten $\operatorname{res}_i f(z) = 1/4$, $\operatorname{res}_{-i} f(z) = 1/4$ und $\operatorname{res}_1 f(z) = -1/2$.

(f) Die Singularitäten von f befinden sich in $z_0 \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten die Fälle:

(i) Sei $z_0 \in 2\mathbb{Z}$. Es gilt $\sin(\pi z) = \pi(z-z_0) + O((z-z_0)^2)$ und folglich $f(z) = 1/(\pi(z-z_0)) + O(1)$. Dann ist $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = 1/\pi$.

(ii) Sei $z_0 \in \mathbb{Z} - 2\mathbb{Z}$. In Analogie zum Fall (i) gilt $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = -1/\pi$.

Aufgabe 38.

(a) Es gilt

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = z \cdot u(z)$$

mit $u(0) \neq 0$. Daher gilt

$$\frac{z^{n-1}}{\sin^n(z)} = \frac{1}{z} \frac{1}{(u(z))^n}.$$

Folglich ist $\operatorname{res}_0 f(z) = 1$.

(b) Es gilt $(\sin 2z - 2\sin z)^{(k)}\big|_0 = 0$ für $k = 0, 1, 2$, aber $\neq 0$ für $k = 3$. Der Zähler besitzt also eine 3-fache Nullstelle in 0. Ebenso erkennt man, dass die Funktion

$$\sin z - z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

ebenfalls eine 3-fache Nullstelle in 0 besitzt. Die Nullstelle der Funktion $\sin z$ ist einfach.
Wir erhalten ferner

$$\frac{1}{\sin z(\sin z - z)} = \frac{1}{z^4} \frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-2}\right)} = -6\frac{1}{z^4} + O(z^{-3}).$$

Außerdem ist $\sin 2z - 2\sin z = -6/3! z^3 + O(z^4)$ und damit folgt $\operatorname{res}_0 f(z) = 6$.

(c) Es gilt $(1 - \cos z)^2 = z^4/4 + O(z^6)$. Weiterhin ist

$$(\tan z - z)^{(k)}\Big|_0 \text{ für } k = 0, 1, 2 \text{ und}$$

$$(\tan z - z)^{(3)}\Big|_0 = 2.$$

Es folgt, dass $\tan z - z = 2/3! \cdot z^3 + O(z^4)$ ist. Insgesamt gilt $f(z) = 4/3 \cdot 1/z + O(1)$ und damit $\operatorname{res}_0 f(z) = 4/3$.

(d) Es gilt $\log(z+1) = z + O(z^2)$ und folglich

$$\frac{1}{log(z+1)} = \frac{1}{z} + O(1).$$

Es folgt $\operatorname{res}_0 f(z) = -1$.

(e) Es gilt $1 - \sqrt{2-z} = 1/2(z-1) + O((z-1)^2)$, weiter gilt $\operatorname{res}_1 f(z) = 2$.

(f) Mit der bekannten Darstellung des cos erhalten wir $\operatorname{res}_0 f(z) = 1/2$.

Aufgabe 39.

(a) Sei zunächst $U \subset G$ offen und $f|_U$ habe keine Polstelle. Dann ist $f(U)$ offen nach dem Satz von der Gebietstreue.
Ist $z \in G$ eine Polstelle von f, so existiert eine Umgebung U von z, sodass f keine Nullstelle in U besitzt (Identitätssatz). Dann existiert eine holomorphe Funktion $g = (f|_U)^{-1} : U \to G$. Folglich ist $g(U)$ offen.
Nach der Definition der Topologie von $\hat{\mathbb{C}}$ ist dann

$$\left\{ \frac{1}{z} : z \in g(U) - \{0\} \right\} \cup \{\infty\}$$

eine Umgebung von ∞ in $\hat{\mathbb{C}}$.
Da wir G als Vereinigung von Mengen U wie oben schreiben können und $f(G)$ die Vereinigung der $f(U)$ ist, folgt die Behauptung.

(b) Wir unterscheiden zwei Fälle.
Sei zunächst $w = \infty$. Es bezeichne $(\tilde{z_n})$, $z_n \in U$, eine Folge von Polstellen mit $\lim_{n\to\infty} \tilde{z_n} = z_0$. Dann existiert für jedes $\tilde{z_n}$ ein $z_n \in U$ mit f ist holomorph in z_n und $|f(z_n)| > n$ und $|\tilde{z_n} - z_n| < 1/n$, denn die $\tilde{z_n}$ sind Polstellen von f. Es folgt insbesondere, dass $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ und $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \infty \in \hat{\mathbb{C}}$.

Sei nun $w \in \mathbb{C}$. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gebe keine solche Folge. Dann betrachte man $g(z) = 1/(f(z) - w)$. Weil die Menge $\{ z \in U - \{z_0\} : f(z) = w \}$ diskret in $U - \{z_0\}$ liegt und nach der Annahme keine solche Folge z_n existiert, ist $\{ z \in Z - \{z_0\} : f(z) = w \}$ diskret in U .
Es existiert also ein $\epsilon > 0$, sodass $f(z) = w$ ist für alle $z \in U(z_0, \epsilon) - \{z_0\}$.
Die Annahme impliziert ferner, dass $g|_{U(z_0,\epsilon)-\{z_0\}}$ beschränkt und damit holomorph fortsetzbar ist zu einer Funktion $\hat{g} : U(z_0, \epsilon) \to \mathbb{C}$.
Nun ist aber z_0 ein Häufungspunkt von Polstellen von f , und somit ist z_0 ein Häufungspunkt von Nullstellen von $\hat{g}$. Mit dem Identitätssatz erhalten wir $\hat{g} = 0$. Dies ist ein Widerspruch.