Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Lösung 11

Aufgabe 40.

(a) Mit Satz 5.5.3 gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)} \frac{1}{z^4+1} + \operatorname{res}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)} \frac{1}{z^4+1} + \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(b) Wir substituieren zunächst $t = x^2$.

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{2\pi i}{4}\operatorname{res}_i \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{\pi}{4}$$

(c) Man substituiert $x = 4t^2$ und erhält

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{16+x^2}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

mit Aufgabe 40(a).

Aufgabe 41.

(a) Wir benutzen $\cos 3t = 4\cos^3(t) - 3\cos t$ und den Satz zur Berechnung von Integralen vom **Typ I**. Wir erhalten

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{5-4\cos t}\,dt = -\frac{1}{2i}\int_{\partial\mathbb{E}} \underbrace{\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}}_{f(z)}\,dz = -\frac{2\pi i}{2i}\left(\frac{21}{8} - \frac{65}{24}\right) = \frac{\pi}{12},$$

denn es gilt

$$\operatorname{res}_0 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial z^2} z^3 f(z) = \frac{21}{8}$$

und

$$\operatorname{res}_{1/2} f(z) = \lim_{z\to 1/2} (z-\frac{1}{2}) f(z) = -\frac{65}{24}.$$

(b) Wir betrachen zunächst

$$R(\cos t, \sin t) = \frac{1}{a+\cos t}$$

und benutzen denselben Satz wie in Teil (a). Wir erhalten

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{a+\frac{z+1/z}{2}} = \frac{2}{z^2+2az+1}.$$

Von den Nullstellen des Nenners liegt nur $z_0 := -a + \sqrt{a^2-1}$ in $\mathbb{E}$. Damit gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos t}\,dt = 2\pi \operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Differenzieren nach a liefert

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos\, t}\, dt = \int\limits_0^{2\pi}\frac{-1}{(a+\cos\, t)^2}\, dt = \frac{\partial}{\partial a}\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} = -\frac{2\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}.$$

Aufgabe 42.

(a) Es gilt

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin\, x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\, x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+a^2}e^{ix}\, dx\right)$$

$$= \pi\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{res}_{ia}\left(\frac{z}{z^2+a^2}e^{iz}\right)\right) = \frac{\pi e^{-a}}{2}.$$

(b) Wir unterscheiden drei Fälle:

(i) $a > 0$
Wir setzen $z = it/a$. Damit ergibt sich ein Integral vom **Typ II**:

$$\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{az}}{(z^2-1)^2}\, dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{ia^4e^{it}}{a(t^2+a^2)^2}\, dt$$

$$= -2\pi a^3\,\mathrm{res}_{ia}\frac{e^{it}}{(t^2+a^2)^2} = \frac{\pi i(a+1)e^{-a}}{2}$$

(ii) $a < 0$
Wie vorher setzen wir $z = it/a$ und erhalten

$$\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{az}}{(z^2-1)^2}\, dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{i|a|^3e^{it}}{(t^2+|a|^2)^2}\, dt = \frac{\pi i(|a|+1)e^{a}}{2}$$

mit (i), denn $|a| > 0$.

(iii) $a = 0$
Hier ist mit $z = it$

$$\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{(z^2-1)^2}\, dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{(t^2+1)^2}\, dt = -2\pi\,\mathrm{res}_i\,\frac{1}{(t^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 43.

(a) Wir benutzen den Satz von Rouché mit $f(z) = -5z$ und $g(z) = 2z^4 - 5z + 2$. Dann gilt $|2z^4+2| \leq 4 < 5 = |-5z|$ für alle z mit $|z| = 1$. Die Funktion f besitzt folglich eine Nullstelle in $U(0,1)$. Ferner existiert keine Nullstelle z mit $|z| = 1$. Somit gibt es drei Nullstellen mit $|z| > 1$.

(b) Hier betrachten wir $f(z) = z^7 - 5z^4$ und $g(z) = z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2$. Es gilt $|iz^2-2| \leq 3 < |z^4||z^3-5|$ für alle z mit $|z| = 1$. Nach dem Satz von Rouché liegen dann 4 Nullstellen innerhalb des Einheitskreises.