Lösung zur Klausur vom 11.07.2005

Aufgabe 1.
Sei $z = x + iy$. Dann ist $f(z) = (x - iy)y = xy - iy^2$ und somit ist $f = u + iv$ mit $u(x,y) = xy$ und $v(x,y) = -y^2$. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgelichungen lauten dann

$$u_x = y \overset{!}{=} v_y = -2y \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$$u_y = x \overset{!}{=} -v_x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Aufgabe 2.

(a)
$$\int_\gamma |z|\,dz = \int_{-1}^{1} |it| \cdot i\,dt = i$$

(b) Es gilt

$$\frac{e^z}{z(z^3-1)} = \frac{e^z}{z(z-1)(z^2+z+1)}.$$

Mit der Cauchy-Integralformel erhält man

$$\int_{|z-3/2|=1} \frac{e^z}{z(z^3-1)}\,dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{e^z}{z(z^2+z+1)}\right|_{z=1} = \frac{2\pi i e}{3}.$$

Aufgabe 3.

(a) Die Funktion $g(z)$ hat Polstellen bei 1 und $2i$. Daher gilt

$$R = \min\{\,|2+2i-1|, |2+2i-2i|\,\} = 2.$$

(b) Wir betrachten

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n (z+2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z+2)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(z+2)^{-n}.$$

Es gilt $\sqrt[n]{2^n} \to 2$ für $n \to \infty$, also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z+2)^n$ für alle z mit $|z+2| < 1/2$.
Weiter gilt $\sqrt[n]{2^{-n}} \to 1/2$ für $n \to \infty$, also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(z+2)^{-n}$ für alle z mit $|z+2| > 1/2$.

Aufgabe 4.
Zunächst entwickeln wir

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) z^n$$

auf dem Ringgebiet $U(0,0,1)$ und

$$f(z) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{2z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} z^n$$

auf dem Ringgebiet $U(0,1,2)$.

Aufgabe 5.

$\Rightarrow$ Wir führen einen indirekten Beweis. Sei f ein Polynom, also

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

mit $a_N \neq 0$. Dann gilt

$$g(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n .$$

Folglich besitzt g in 0 einen Pol der Ornung N , insbesondere keine wesentliche Singularität.

$\Leftarrow$ Ist f kein Polynom, so besitzt f eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit unendlich vielen $a_n \neq 0$. Dann gilt

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n .$$

Aus dieser Darstellung erkennt man, dass g eine wesentliche Singularität in 0 besitzt.

Aufgabe 6.

(a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(x+i)(x-i)(x+2i)(x-2i)}}_{=f(x)}\, dx$$

$$= 2\pi i(\operatorname{res}_i f(z) + \operatorname{res}_{2i} f(z)) = 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i}\right) = \frac{\pi}{6}$$

(b)
$$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2+\cos x}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi i \operatorname{res}_{-2+\sqrt{3}} \left(\frac{2}{i} \frac{1}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}\right) = \pi i \frac{2}{2\sqrt{3}i} = \frac{1}{\sqrt{3}}\pi$$

Hier ist

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{i} \frac{1}{z^2+4z+1}.$$

Aufgabe 7.
Mit dem Satz von der Gebietstreue folgt, dass $f(D)$ ein Gebiet ist. Kein Randpunkt von $\mathbb{E}$ liegt in einer offenen Teilmenge von $\bar{\mathbb{E}}$, daher folgt die Behauptung.

Aufgabe .8
Mit dem Maximumprinzip gilt $|f(z)| \leq M_f(r)$ für alle z mit $|z| < r$. Daraus folgt bereits $M_f(r_1) \leq M_f(r_2)$, falls $r1 < r_2$.
Angenommen, es existieren r_1, r_2 mit $r_1 \neq r_2$ und $M_f(r_1) = M_f(r_2)$. Dann nimmt f im Inneren von $\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_2 \}$ ein lokales Maximum an. Folglich ist f konstant. Dies ist ein Widerspruch.

Aufgabe 9.
Wir betrachten $g(z) = z^4 + 6z + 3$ und $f(z) = z^4$. Dann gilt

$$|f(z) - g(z)| = |-6z - 3| \leq 12 + 3 = 15 < 10 = |z^4| \text{ für alle } z \text{ mit } |z| = 2.$$

Nach dem Satz von Rouché liegen alle 4 Nullstellen von g im angegebenen Gebiet.

Aufgabe 10.
Auf dem Elementargebiet $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert ein Zweig der Wurzel g, sodass $g \circ f(\mathbb{C}) \subseteq \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \}$ gilt. Angenommen, f sei nicht konstant. Dann ist $g \circ f$ eine ganze Funktion, die nicht konstant ist, folglich liegt $g \circ f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$. Weil jedoch $g \circ f(\mathbb{C})$ in der oberen Halbebene liegt, ergibt sich ein Widerspruch.