Lösungen Präsenz-Blatt 1 — 18/19.4.05

1. Ist eine komplexe Zahl z in der Normalform $z = a + \mathrm{i}b$, $a, b \in \mathbb{R}$, gegeben, so ist $a = \operatorname{Re} z$ und $b = \operatorname{Im} z$. Hat sie nicht diese Gestalt, so muß man sie häufig in diese Form bringen:
$$\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1} = \frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1} \cdot \frac{-\mathrm{i}+1}{-\mathrm{i}+1} = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i},$$
also ist
$$\operatorname{Re} \frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1} = 0, \quad \operatorname{Im} \frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1} = 1.$$
Ähnlich zeigt man
$$\frac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = -1 + 2\mathrm{i}.$$
Wegen $\mathrm{i}^4 = 1$ nimmt i^n nur die Werte $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$ an, je nachdem n von der Form $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ ist. Wegen
$$\varrho := \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}$$
ist ϱ eine achte Einheitswurzel. Der Wert von ϱ^n hängt also nur von n modulo 8 ab. Berechnet man die Werte für $n = 0$ bis $n = 7$, so erhält man die Realteile 1, $\sqrt{2}/2$, 0, $-\sqrt{2}/2$, -1, $-\sqrt{2}/2$, 0, $\sqrt{2}/2$.

   Man behandelt analog die sechste Einheitswurzel $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2$.

   Die Zahl $(1-\mathrm{i})/\sqrt{2}$ ist ebenfalls eine achte Einheitswurzel. Die Summe über alle achten Einheitswurzeln ist 0.

   Der Wert des letzten Ausdrucks ist 2.

2. Der Betrag ist immer leicht auszurechnen, man benutzt die Formel $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Das Argument ist häufig schwieriger zu berechnen, da man Winkelfunktionen umkehren muß. Eine allgemeine geschlossene Formel wird in Aufgabe 21 aus I.2 angegeben. Beispielsweise ist für reelle positive a
$$\operatorname{Arg}\frac{1+\mathrm{i}a}{1-\mathrm{i}a} = \arccos\frac{1-a^2}{1+a^2} = 2\arctan a.$$

6. a) G_0 stellt eine Gerade dar, G_+ und G_- sind die angrenzenden Halbebenen.
   b) K ist eine Kreislinie.
   c) L ist eine Lemniskate, welche wie ∞ aussieht.

10. Wenn die Koeffizienten reell sind, gilt $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.

11. a) Es gilt $\operatorname{Im}\dfrac{-1}{z} = \operatorname{Im}\dfrac{-\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}$.
    b) Man verifiziere die Gleichungen mittels der Formel $|w|^2 = w\bar{w}$.

15. a) Schreibt man z in Polarkoordinaten, $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$, so ist
$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r}e^{\mathrm{i}\varphi}.$$
Der Punkt $1/\bar{z}$ liegt also auf der Geraden durch 0 und z und hat den Betrag $1/r$. Hieraus leitet man folgende geometrische Konstruktion ab. Sei $0 < |z| < 1$. Man errichte auf der Geraden durch 0 und z in z das Lot und schneide es mit der Einheitskreislinie. Die Tangenten in den Schnittpunkten schneiden sich in $1/\bar{z}$ (vgl. die rechte Abbildung auf Seite 8).
    b) Man konstruiere $1/\bar{z}$ und spiegele an der reellen Achse.