Lösung Präsenz-Blatt 2

(2.)

(a) ⇒ (b)

Es gilt $l = \lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$. Man definiert daher $\varphi : D \to \mathbb{C}$ durch $\varphi(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$

für $z \neq a$ und $\varphi(a) = l$.

Wegen $\lim_{z \to a} \varphi(z) = l$ ist φ in a stetig.

(b) ⇒ (c)

Man definiert $\rho = \varphi - l$.

(c) ⇒ (d)

Es ist $r(z) = \rho(z)(z-a)$, somit

$\lim_{z \to a} \frac{r(z)-r(a)}{z-a} = \rho(a) = 0$, denn ρ ist stetig.

(d) ⇒ (a)

Es ist $\lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = l + \lim_{z \to a} \frac{r(z)-r(a)}{z-a} = l$

⇒ □

20. Dies ist nichts anderes als eine Umschreibung der CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen 5.3.

17. Wenn z in der oberen Halbebene liegt, so liegt z näher bei i als bei $-$i. Insbesondere ist $f(z)$ im Einheitskreis enthalten. Ähnlich zeigt man, daß $g(w) := \mathrm{i}\frac{1+w}{1-w}$ in der oberen Halbebene enthalten ist, wenn w im Einheitskreis liegt. Die beiden Abbildungen kehren sich gegenseitig um.

6. Die Teilaufgaben a) und b) folgen aus den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen in Verbindung mit Bemerkung 5.5. Um Teil c) zu beweisen, betrachte man mit $f = u + iv$ die konstante Funktion $|f|^2 = u^2 + v^2$. Wir können annehmen, daß diese Konstante von 0 verschieden ist. Man differenziert diesen Ausdruck nach x und y und erhält unter Verwendung der CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen das Gleichungssystem

$$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0.$$

Hieraus folgt $u_x = u_y = 0$.