Aufgaben für die Tutorien - Lösung 5

1.)

(A.1) Mit geeigneten Umformungen führt man das Problem auf die geometrische Reihe zurück. Es gilt

$$\frac{3z^2+1}{z+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3z^2+1}{1-\frac{-(z-2)}{3}} = \frac{3(z-2)^2+12(z-2)+13}{3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-(z-2)}{3}\right)^k$$
$$= \frac{13}{3}+\frac{23}{9}(z-2)+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{4}{3^{k+1}}(z-2)^k$$

$$\frac{3z^2+1}{z+1} = \frac{1}{1+i}\cdot\frac{3z^2+1}{1-\frac{-(z-i)}{1+i}} = \frac{3(z-i)^2+6i(z-i)-2}{1+i}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-(z-i)}{1+i}\right)^k$$
$$= (-1+i)+(3+2i)(z-i)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{(1+i)^{k+1}}(z-i)^k$$

Die erste Reihe konvergiert für $|z-2|<3$, die zweite für $|z-i|<\sqrt{2}$. Dies ergibt sich aus dem Konvergenzbereich der benutzten geometrischen Reihen.

Es folgt auch aus dem allgemeinen Satz, daß Potenzreihen in dem größten Kreis um den Entwicklungspunkt konvergieren, in dem die dargestellte Funktion holomorph ist. $\frac{3z^2+1}{z+1}$ ist in $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ holomorph.

(A.2) Man macht eine Partialbruchzerlegung und wendet wieder die geometrische Summenformel an. Es gilt

$$\frac{z^2}{(z+i)(z-i)^2} = \frac{1/4}{z+i}+\frac{3/4}{z-i}+\frac{i/2}{(z-i)^2} \tag{1}$$
$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{i}\frac{1}{1-iz} = \sum_{k=0}^{\infty} i^{k-1}z^k \tag{2}$$
$$\frac{1}{z-i} = -\frac{1}{i}\frac{1}{1+iz} = \sum_{k=0}^{\infty}(-i)^{k-1}z^k \tag{3}$$
$$\frac{1}{(z-i)^2} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-i}\right) = -\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(-i)^k z^k \tag{4}$$

Zusammen ergibt sich:

$$\frac{z^2}{(z+i)(z-i)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^{k+1}}{4}\left[2k-1+(-1)^k\right]z^k = iz^2+z^3-2iz^4-2z^5+\dots$$

(A.3)

$$\sin^2 z = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2z) = \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(2z)^{2k}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}(2z)^{2k} = z^2-\frac{z^4}{3}+\frac{2z^6}{45}-+\dots \tag{5}$$

(A.4)

$$\cos(z^2-1) = \cos(z^2)\cos 1+\sin(z^2)\sin 1 =$$
$$= \cos 1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{4k}+\sin 1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{4k+2} \tag{6}$$
$$= \cos 1+(\sin 1)z^2-\frac{\cos 1}{2}z^4-\frac{\sin 1}{6}z^6++--\dots$$

(A.5) Aus $\sin z = z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\frac{1}{5040}z^7+-\dots$ und $\tan z = z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\frac{17}{315}z^7+\dots$ erhält man

$$\sin^3 z = z^3-\tfrac{1}{2}z^5+\tfrac{13}{120}z^7+\dots \tag{7}$$
$$\sin^5 z = z^5-\tfrac{5}{6}z^7+\dots \qquad \sin^7 z = z^7+\dots \tag{8}$$
$$\tan^3 z = z^3+z^5+\tfrac{11}{15}z^7+\dots \tag{9}$$
$$\tan^5 z = z^5+\tfrac{5}{3}z^7+\dots \qquad \tan^7 z = z^7+\dots \tag{10}$$
$$\tan(\sin z) = z+\tfrac{1}{6}z^3-\tfrac{1}{40}z^5-\tfrac{107}{5040}z^7+\dots \tag{11}$$
$$\sin(\tan z) = z+\tfrac{1}{6}z^3-\tfrac{1}{40}z^5-\tfrac{275}{5040}z^7+\dots \tag{12}$$

Man erhält $f(z) := \tan(\sin z)-\sin(\tan z) = \frac{1}{30}z^7+\dots$.

f hat Singularitäten an den Polstellen von $\tan z$, also in $z = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, und an den Stellen, in denen $\sin z = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ist. Das letztere ist der Fall für $z = \frac{(2k+1)\pi}{2} \pm i\operatorname{arcosh}\frac{(2k+1)\pi}{2}$. Die nächstgelegenen Singularitäten sind daher $\pm\frac{\pi}{2}$. Der Konvergenzradius der Reihenentwicklung von f ist also $\frac{\pi}{2}$.