2.)

(B.1) Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{2^k}$ konvergiert für $|w| < 2$ und divergiert für $|w| > 2$. Also konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k}}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^3)^k}{2^k}$ für $|z^3| < 2$ und divergiert für $|z^3| > 2$. Also ist der Konvergenzradius $\varrho = \sqrt[3]{2}$.

Achtung: Wenn man die Cauchy-Hadamard-Formel anwenden will, darf man <u>nicht</u> $a_k = 1/2^k$ setzen. Vielmehr ist $a_k = 1/2^j$ für $k = 3j$ und $a_k = 0$ sonst.

(B.2) Nach der Cauchy-Hadamard-Formel ist $\varrho = \left(\overline{\lim}\, \sqrt[k]{|a_k|}\right)^{-1}$. Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3k^2+k}{2k^2+1}\right)^k z^k$ ergibt sich

$$\sqrt[k]{|a_k|} \;=\; \sqrt[k]{\left(\frac{3k^2+k}{2k^2+1}\right)^k} \;=\; \frac{3k^2+k}{2k^2+1} \;\to\; \frac{3}{2} \qquad (13)$$

für $k \to \infty$. Also ist $\varrho = \frac{2}{3}$.

(B.3) Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{3^k(2k)!}(z+1)^k$ gilt:

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \;=\; \frac{k!}{3^k(2k)!}\,\frac{3^{k+1}(2k+2)!}{(k+1)!} \;=\; \frac{3(2k+1)(2k+2)}{k+1} \;\to\; \infty \qquad (14)$$

für $k \to \infty$. Also ist $\varrho = \infty$.

(B.4) Sei $a_k := k^2 + b^k$ und zunächst $|b| \le 1$. Dann ist $k \le |a_k| \le k^3$ für $k \ge 2$ und daher $\sqrt[k]{|a_k|} \to 1$ für $k \to \infty$. Also ist in diesem Fall $\varrho = 1$.

Sei nun $|b| > 1$. Wegen $b^k/k^2 \to \infty$ ist $\frac{|b|^k}{2} \le |a_k| \le 2|b|^k$ ab einer Stelle k_0. Also gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \to |b|$ für $k \to \infty$ und daher $\varrho = 1/|b|$ für $|b| > 1$.

(B.5) Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} z^k$ gilt:

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \;=\; \frac{(k!)^2}{(2k)!}\,\frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2} \;=\; \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \;\to\; 4 \qquad (15)$$

für $k \to \infty$. Also ist $\varrho = 4$.

(B.6) Wegen $|\cos k| \le 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (\cos k)\, z^k$ für $|z| < 1$. Also ist ihr Konvergenzradius $\varrho \ge 1$.

Die Folge $|\cos k|$ ist nicht konvergent (siehe z.B. Aufgabe [RA1 4.6.2.B]). Also ist $1 \ge \overline{\lim}\, |\cos k| > 0$. Nach Cauchy-Hadamard folgt $\varrho = 1$.