Aufgaben für die Tutorien

18./19. 04. 2005

1. Von den folgenden komplexen Zahlen bestimme man jeweils *Real-* und *Imaginärteil:*

$$\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}; \quad \frac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}; \quad \mathrm{i}^n,\ n \in \mathbb{Z}; \quad \left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n,\ n \in \mathbb{Z};$$

2. Von den folgenden komplexen Zahlen berechne man jeweils *Betrag* und (ein) *Argument:*

$$-3+\mathrm{i}; \quad -13; \quad (1+\mathrm{i})^{17} - (1-\mathrm{i})^{17}; \quad \mathrm{i}^{4711}; \quad \frac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}};$$

6. Die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ veranschauliche man sich in der komplexen Zahlenebene:

a) Seien $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, und

$$G_0 := \left\{ z \in \mathbb{C};\quad \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0 \right\},$$

$$G_+ := \left\{ z \in \mathbb{C};\quad \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0 \right\} \quad \text{und}$$

$$G_- := \left\{ z \in \mathbb{C};\quad \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) < 0 \right\}.$$

10. Sei P ein Polynom mit komplexen Koeffizienten:

$$P(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0,\ a_\nu \in \mathbb{C}, \quad \text{für} \quad 0 \leq \nu \leq n.$$

Eine reelle oder komplexe Zahl ζ heißt *Nullstelle* von P, falls $P(\zeta) = 0$ gilt.

Man zeige: Wenn alle Koeffizienten a_ν reell sind, dann gilt

$$P(\zeta) = 0 \implies P(\overline{\zeta}) = 0.$$

Mit anderen Worten: Hat das Polynom P nur *reelle Koeffizienten,* dann treten die nicht reellen Nullstellen von P in Paaren konjugiert komplexer Nullstellen auf.

11. a) Sei $\mathbb{H} := \{ z \in \mathbb{C};\quad \operatorname{Im} z > 0 \}$ die *obere Halbebene.*
Man zeige: $z \in \mathbb{H} \iff -1/z \in \mathbb{H}$.

b) Seien $z, a \in \mathbb{C}$.
Man zeige: $$|1 - z\bar{a}|^2 - |z-a|^2 = (1-|z|^2)(1-|a|^2).$$

Man folgere: Ist $|a| < 1$, dann gilt

$$|z| < 1 \iff \left|\frac{z-a}{\bar{a}z-1}\right| < 1 \quad \text{und} \quad |z| = 1 \iff \left|\frac{z-a}{\bar{a}z-1}\right| = 1.$$

15. a) Man betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{C}^\bullet \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(z) = 1/\overline{z}.$$

Man gebe eine geometrische Konstruktion (Zirkel und Lineal) für den Bildpunkt $f(z)$ und begründe, warum diese Abbildung „*Transformation durch reziproke Radien*" oder „*Spiegelung an der Einheitskreislinie*" genannt wird. Man bestimme jeweils das Bild unter f von

α) $D_1 := \{ z \in \mathbb{C};\quad 0 < |z| < 1 \}$,
β) $D_2 := \{ z \in \mathbb{C};\quad |z| > 1 \}$,
γ) $D_3 := \{ z \in \mathbb{C};\quad |z| = 1 \}$.

b) Jetzt betrachte man die Abbildung

$$g : \mathbb{C}^\bullet \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad g(z) = 1/z \ (= \overline{f(z)})$$

und gebe ebenfalls eine geometrische Konstruktion für den Bildpunkt $g(z)$ von z. Warum heißt diese Abbildung „*Inversion an der Einheitskreislinie*"? Welche Fixpunkte hat g, d. h. für welche $z \in \mathbb{C}^\bullet$ gilt $g(z) = z$?