Aufgaben für die Tutorien - 2

25./26.04.2005

2) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge von komplexen Zahlen, $a \in D$ ein Häufungspunkt und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) f ist in a komplex differenzierbar mit Ableitung $l \in \mathbb{C}$.

(b) Es existiert eine in a stetige Funktion $\varphi : D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(a) + (z-a)\cdot\varphi(z) \quad \text{und} \quad \varphi(a) = l.$$

(c) Es existiert eine in a stetige Funktion $\rho : D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(a) + (z-a)\cdot l + (z-a)\cdot\rho(z) \quad \text{und} \quad \rho(a) = 0.$$

(d) Definiert man $r : D \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = f(a) + (z-a)\cdot l + r(z)$, so gilt

$$\lim_{z\to a}\frac{r(z)-r(a)}{z-a} = 0.$$

20. Sei $f = u + iv$ eine (im Sinne der reellen Analysis) total differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ auf einem offenen Teil $D \subset \mathbb{C}$. Man definiert die Operatoren

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Man zeige: f ist genau dann analytisch, wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ ist, und in diesem Falle gilt $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$.

Bemerkung. Für die ursprünglich von H. Poincaré (1899) eingeführten Differentialoperatoren $\partial := \frac{\partial}{\partial z}$ und $\bar\partial := \frac{\partial}{\partial \bar z}$ wurde von W. Wirtinger (1927) ein systematischer Kalkül — der sogenannte *Wirtingerkalkül* — entwickelt. Er spielt jedoch in der klassischen Funktionentheorie einer Veränderlichen eine untergeordnete Rolle; seine volle Tragweite entfaltet er erst in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher, für die er von Wirtinger ursprünglich entwickelt wurde.

17. Sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene und $\mathbb{E} = \{q \in \mathbb{C};\ |q| < 1\}$ der Einheitskreis.

Man zeige: Durch

$$f(z) := \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$

wird eine (im Großen) konforme Abbildung von $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{E}$ vermittelt. Wie lautet die Umkehrabbildung?

Man nennt f auch *Cayleyabbildung* (A. Cayley, 1846).

6. Ist $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch, $D \subset \mathbb{C}$ offen, und gilt eine der folgenden Bedingungen:
a) $\operatorname{Re} f = \text{constant}$,
b) $\operatorname{Im} f = \text{constant}$,
c) $|f| = \text{constant}$,
so folgt: f ist lokal konstant.