Aufgaben für die Tutorien - Blatt 6

4. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen.

   Man zeige: Für eine Teilmenge $M \subset D$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:

   a) M ist diskret in D, d. h. kein Häufungspunkt von M liegt in D.
   b) Zu jedem $p \in M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(p) \cap M = \{p\}$ gilt, und M ist abgeschlossen in D (d. h. es gibt eine in $\mathbb{C}$ abgeschlossene Menge A mit $M = A \cap D$).
   c) Für jede kompakte Teilmenge $K \subset D$ ist $M \cap K$ endlich.
   d) M ist *lokal endlich* in D, d. h. jeder Punkt $z \in D$ besitzt eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(z) \subset D$, so daß $M \cap U_\varepsilon(z)$ endlich ist.

5. Eine diskrete Teilmenge (s. 4.) ist (höchstens) abzählbar, d. h. endlich oder abzählbar unendlich.

6. Ist $f : D \to \mathbb{C}$ eine von der Nullfunktion verschiedene analytische Funktion auf einem Gebiet D, dann ist die Nullstellenmenge von f (höchstens) abzählbar.

7. Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei analytische Funktionen, und es gelte
$$f(g(z)) = 0 \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$
   Man zeige: Ist g nicht konstant, so ist $f \equiv 0$.