Seminarvortrag:
Der Satz von Ehrhart

Gliederung

1. **Wiederholung**
   - Was ist ein Simplex?
   - Der Satz von Ehrhart

2. **Einführung zum Beweis**

3. **Beweis des Satzes**
   - Beweis für ein Simplex
   - Beweis für ein Polytop

Was ist ein Simplex?

Definition:

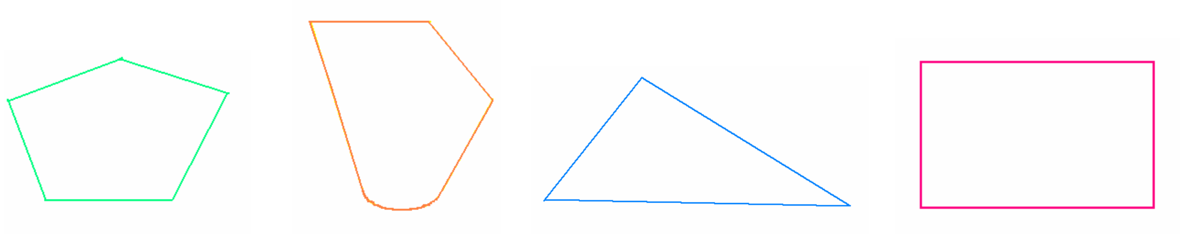
Eine Teilmenge $Q \subset V$ heißt **Polytop**, wenn es endlich viele Punkte $p_0, \ldots, p_N \in V$ gibt, so dass $Q = \mathrm{Kon}(p_0, \ldots, p_N)$ gilt.

Spezialfall:

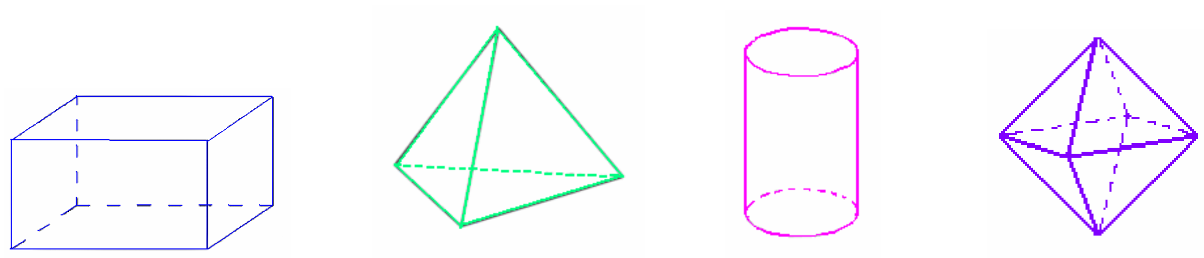
Eine Teilmenge $S \subset V$ heißt **k -Simplex**, wenn es affin linear unabhängige Punkte $p_0, \ldots, p_k \in V$ gibt, so dass

$$S = \mathrm{Kon}\,(p_0, \ldots, p_k) \text{ gilt.}$$

Im Zweidimensionalen:



Im Dreidimensionalen:



Volumenbestimmung von Gitterpolytopen

Definition:

Gitterpolytope sind Polytope, deren Ecken ganzzahlige Koordinaten aufweisen.

Ziel:

Bestimmung des Volumens des Gitterpolytops aus der Anzahl der ganzzahligen Punkte im Polytop.

Im Zweidimensionalen:

- **Pick´sche Formel:**

$$A(\Delta) = \#(\Delta \cap Z^2) - \tfrac{1}{2}\,\#(\partial\Delta \cap Z^2) - 1$$

Der Satz von Ehrhart:

Sei Δ ein n-dimensionales Gitterpolytop in Z^n.
Dann gibt es ein eindeutiges Polynom E_Δ (das **Ehrhart Polynom**) mit Koeffizienten in Q, mit folgenden Eigenschaften:

a) Für alle ganzen Zahlen $t \geq 0$ gilt: $E_\Delta(t) = \#(t\Delta \cap Z^n)$

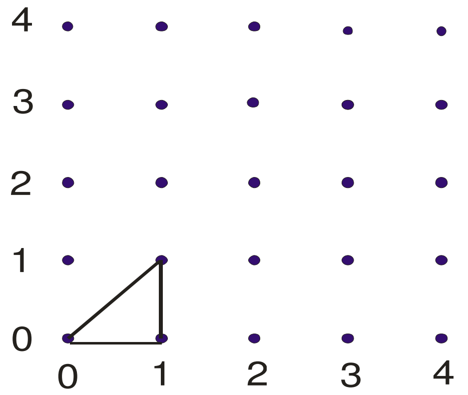
b) Der führende Koeffizient von E_Δ ist das Volumen von Δ.

c) Das Polynom $E_\Delta(t)$ ist vom Grad n.

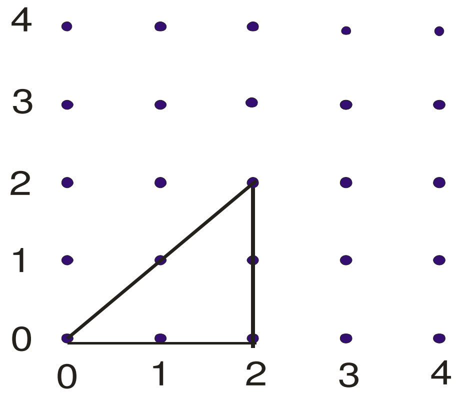
Ein einfaches Beispiel im Zweidimensionalen

Gesucht: $E_\Delta(t) := \#(t\,\Delta \cap \mathbb{Z}^2)$

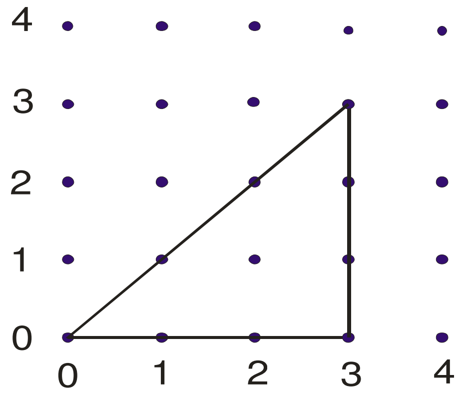
1·Δ



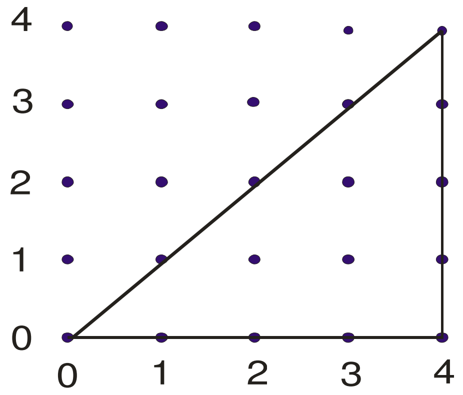
2·Δ



3·Δ



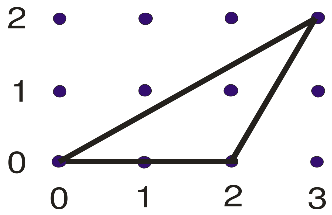
4·Δ



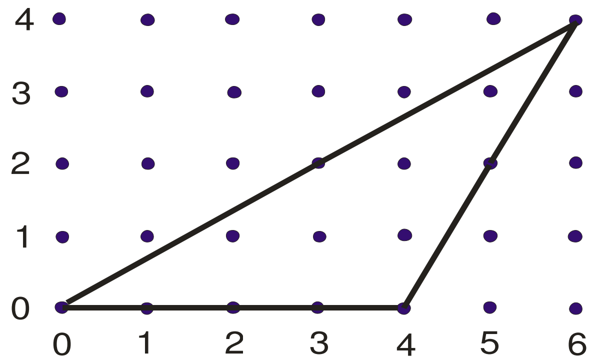
$$E_\Delta(t) = \sum_{k=1}^{t+1} k = \frac{(t+1)(t+2)}{2} = \binom{t+2}{2} = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 1$$

Ein weiteres Beispiel

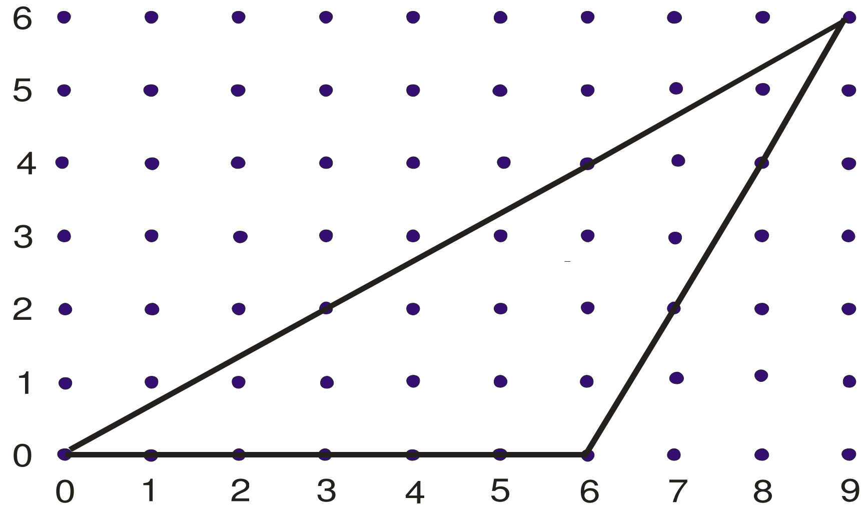
Im Zweidimensionalen:



Δ



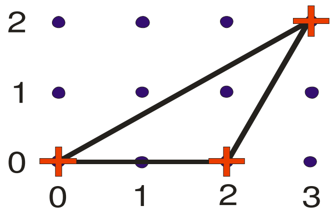
$2\cdot\Delta$



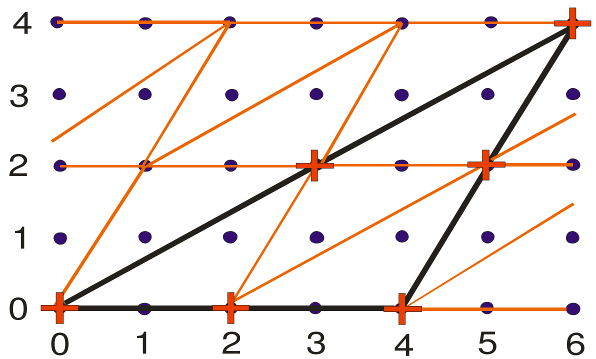
$3\cdot\Delta$

<u>Ein weiteres Beispiel</u>

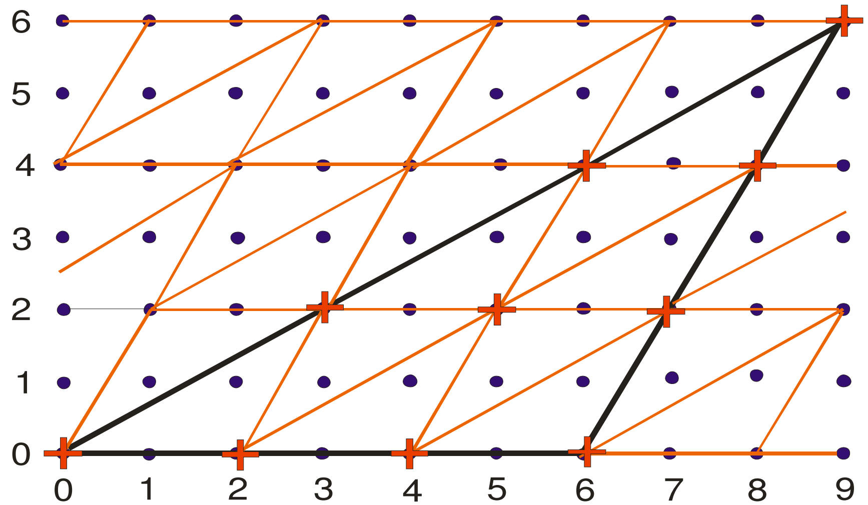
Im Zweidimensionalen:



Δ



$2\cdot\Delta$



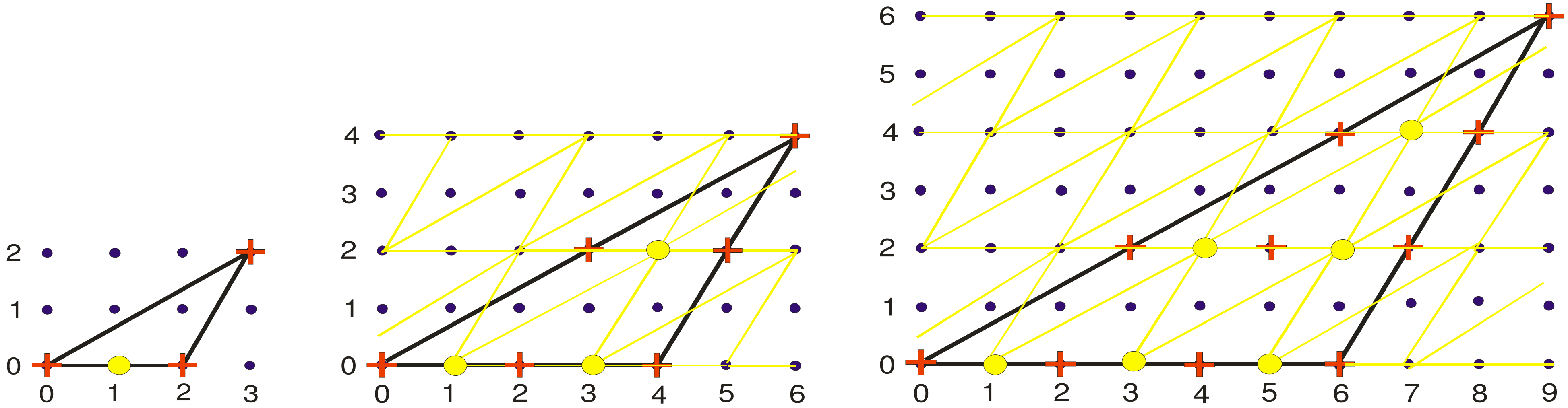
$3\cdot\Delta$

Anzahl der roten Gitterpunkte des Gitterpolytops t·Δ:

$$\sum_{k=1}^{t+1} k = \frac{(t+1)(t+2)}{2} = \binom{t+2}{2}$$

Ein weiteres Beispiel

Im Zweidimensionalen:



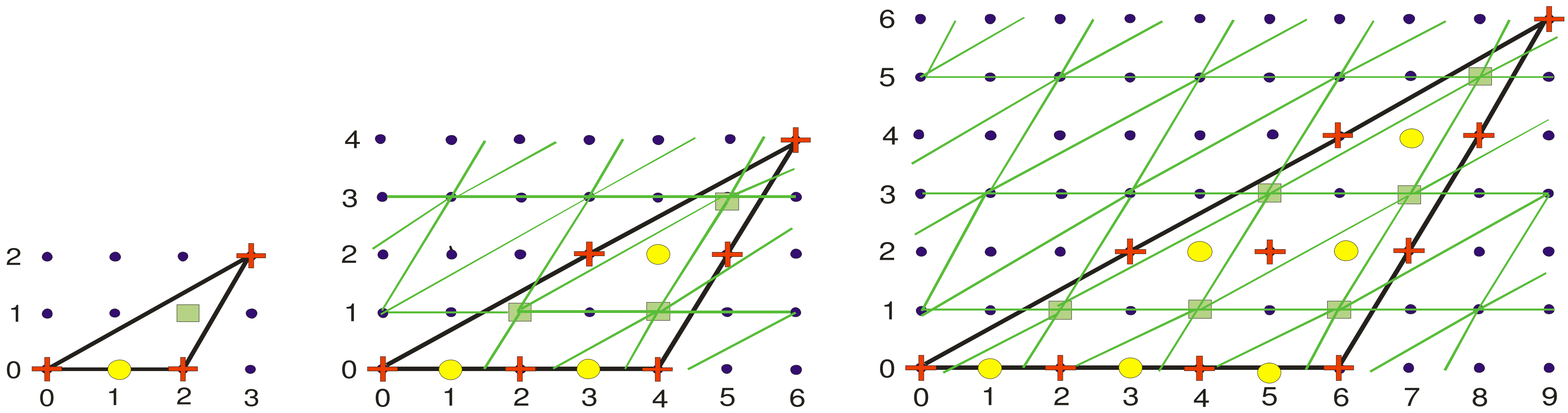
Δ $\qquad 2\cdot\Delta$ $\qquad 3\cdot\Delta$

Anzahl der gelben Gitterpunkte des Gitterpolytops t·Δ:

$$\sum_{k=1}^{t} k = \frac{t\cdot(t+1)}{2} = \binom{t+1}{2}$$

Ein weiteres Beispiel

Im Zweidimensionalen:



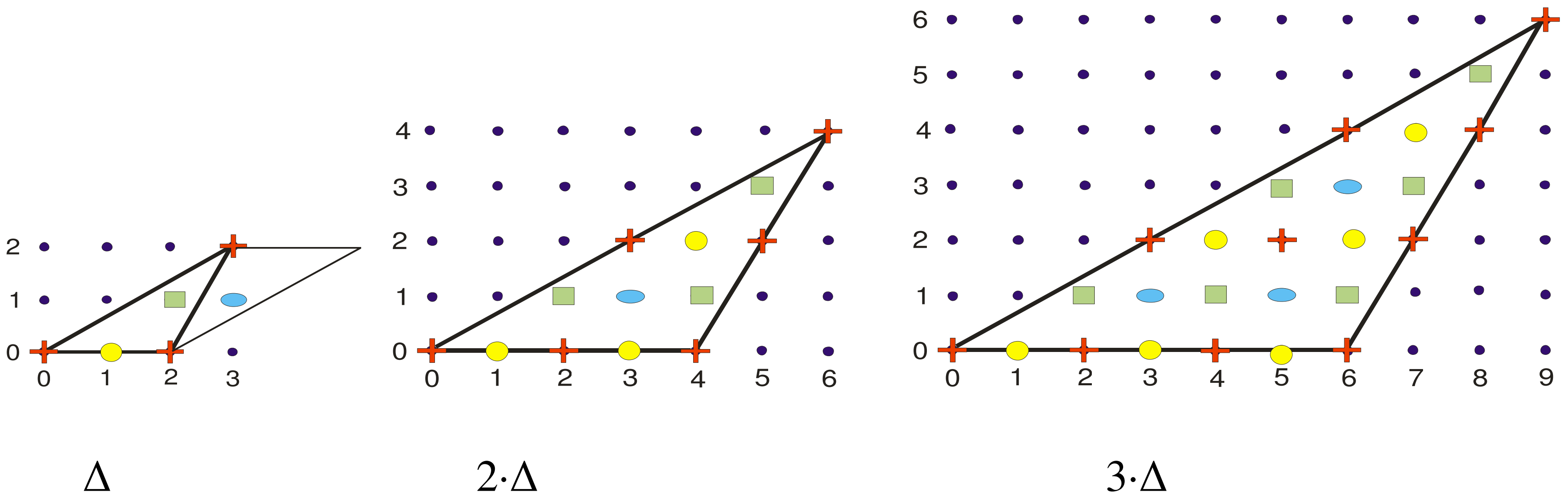
Δ $\quad 2\cdot\Delta$ $\quad 3\cdot\Delta$

Anzahl der grünen Gitterpunkte des Gitterpolytops t·Δ:

$$\sum_{k=1}^{t} k = \frac{t\cdot(t+1)}{2} = \binom{t+1}{2}$$

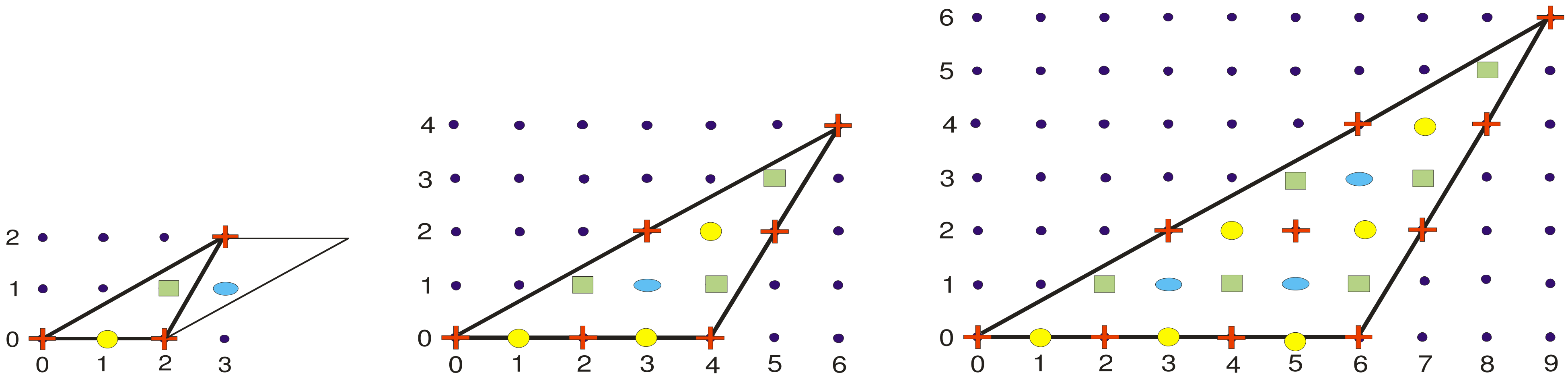
Ein weiteres Beispiel

Im Zweidimensionalen:



Anzahl der blauen Gitterpunkte des Gitterpolytops t·Δ:

$$\sum_{k=1}^{t-1} k = \frac{(t-1)\cdot t}{2} = \binom{t}{2}$$



Δ $\quad$ $2\cdot\Delta$ $\quad$ $3\cdot\Delta$

Anzahl aller Gitterpunkte des Gitterpolytops t·Δ:

rote gelbe grüne blaue

$$\binom{t+2}{2}+\binom{t+1}{2}+\binom{t+1}{2}+\binom{t}{2} \quad = \quad 1\cdot\binom{t+2}{2}+2\cdot\binom{t+1}{2}+1\cdot\binom{t}{2}$$

Allgemein:

$$E_\Delta(t) = a_0\cdot\binom{t+n}{n}+a_1\cdot\binom{t+n-1}{n}+a_2\cdot\binom{t+n-2}{n}+....+a_n\cdot\binom{t}{n}$$

Der Beweis des Satzes von Ehrhart

Der Satz von Ehrhart:

Sei Δ ein n-dimensionales Gitterpolytop in Z^n.
Dann gibt es ein eindeutiges Polynom E_Δ (das **Ehrhart Polynom**) mit Koeffizienten in Q, mit folgenden Eigenschaften:

a) Für alle ganzen Zahlen $t \geq 0$ gilt: $E_\Delta (t) = \# (t\, \Delta \cap Z^n)$

b) Der führende Koeffizient von E_Δ ist das Volumen von Δ.

c) Das Polynom $E_\Delta (t)$ ist vom Grad n.

Beweis:

Das Gitter Z^n werde von den Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ erzeugt.
Das Gitter Z^{n+1} werde von den Einheitsvektoren $e_0, e_1, \ldots, e_n$ erzeugt.

Seien $u_0, u_1, \ldots, u_n$ die Eckpunkte des Simplexes σ Z^n Z^{n+1}

Betrachte das Simplex $\sigma := e_0 + \sigma$ mit Eckpunkten $v_i = e_0 + u_i$ für $0 \leq i \leq n$.

Die Vektoren $v_0, v_1, \ldots, v_n$ erzeugen ein Untergitter M von Z^{n+1}.

Das Untergitter M habe den Rang h. d.h. card $\left(Z^{n+1} / M\right) = h$

Die Vektoren $v_0, v_1, \ldots, v_n$ erzeugen ein Parallelotop π.
π ist die Grundmasche des Untergitters M.

Es gilt:

$$\mathrm{Vol}\,(\pi) = h$$

Sei die Menge T ein **vollständiges Repräsentantensystem von** Z^{n+1}/M

mit Elementen x   π

d.h. $$x = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \cdot v_i$$

mit $0 \leq \mu_i < 1$ $i = 0, 1, \ldots, n$

t·σ bezeichne das Simplex mit den Eckpunkten $t \cdot v_o$, $t \cdot v_1, \ldots, t \cdot v_n$.

Jeder Punkt y   t·σ ist kongruent modulo M zu genau einem Punkt x   T.

d.h. es gilt:

$$y = x + \sum_{i=0}^{n} m_i \cdot v_i$$

mit geeigneten ganzen Zahlen $m_i \geq 0$