1 Affine Geometrie

Def.: *Vor.:* K Kp., V VR. über K, $U \subset V$ UVR., $p \in V$

$A = p + U := \{x \in V; \exists u \in U : x = p + u\}$
A: ein zu A **paralleler affiner Unterraum**
U: zu A eindeutig bestimmter **Richtungsraum**
$\dim A := \dim U$

Bem.: U definiert auf V die Kongruenzrelation: $x \equiv y \mod U \Leftrightarrow x - y \in U$
mit den zu U parallelen affinen Unterräumen als Äquivalenzklassen.

Notiz:
- Sind A und B affine Unterräume von V, die zu U parallel sind, so sind A und B entweder gleich oder disjunkt.
- $A \subset V$ UVR. $\Leftrightarrow$ $A \subset V$ affiner UR. und $0 \in A$
- $q \in p + U \quad \Rightarrow \quad q + U = p + U$
- $A \in V$ aff. UR. parallel zu U
  $\Rightarrow$ für $q \in V$ ist $q + A \subset V$ aff. UR. und parallel zu U

Satz: *Vor.:* Es sei $V = K^n$ der Raum der n-Tupel über K

Beh.: Die aff. UR $A = p + U$ sind genau die Lösungsmengen der lösbaren inhomogenen linearen Gleichungssysteme
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$ für $i = 1, \ldots, m$

Satz: *Vor.:* $p_0, \ldots, p_n \in V$

Beh.: $\mathrm{Aff}(p_0, \ldots, p_n) := \left\{ x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot p_i; \lambda_i \in K, \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$
Dann ist $\mathrm{Aff}(p_0, \ldots, p_n)$ der kleinste affine Unterraum A von V mit $p_0, \ldots, p_n \in A$ und heißt die **affine Hülle** von $(p_0, \ldots, p_n)$.

Bsp.: *Vor.:* $A \subset V$ aff. UR., $q_1, q_2 \in A$: $q_1 \neq q_2$ disjunkte Punkte

Beh.: $\mathrm{Aff}(q_1, q_2) \subset A$ ist die Gerade durch q_1 und q_2.

Def.: Ein System $(p_0, \ldots, p_k)$ vom Punkten $p_i \in V$
heißt **affin linear unabhängig**, wenn die
Vektoren $(p_1 - p_0, \ldots, p_k - p_0)$ linear unabhängig sind.

Eig.: $\dim \mathrm{Aff}(p_0, \ldots, p_k) = k \quad \Leftrightarrow \quad (p_0, \ldots, p_k)$ affin linear unabhängig

Satz: *Vor.:* $A = p + U$, $A' = p' + U'$ aff. UR mit $U \subset V$ und $U' \subset V$

Beh.: $A \cap A' = \emptyset$ oder $A \cap A'$ aff. UR parallel zu $U \cap U'$.

Notiz: *Vor.:* $A = p + U$, $A' = p' + U'$ aff. UR vom V, $U \subset U'$

Beh.: $A \cap A' = \emptyset$ oder $A \subset A'$. A und A' heißen parallel

Notiz: *Vor.:* $p, q_1, \ldots, q_n$ Punkte in V

Beh.: Sei $U = \langle q_1, \ldots, q_n \rangle$ der von $(q_0, \ldots, q_n)$ aufgespannte UVR
$\Rightarrow \quad p + U = \mathrm{Aff}(p, p + q_1, \ldots, p + q_n)$