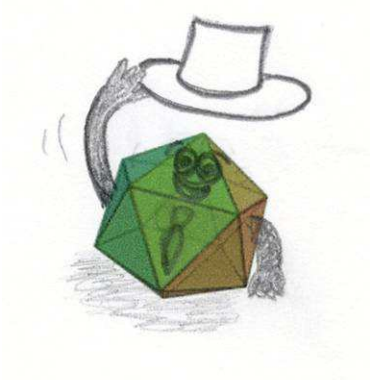
Michaela Riesenberg 8. Mai 2007

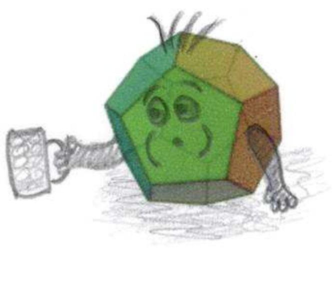
Seminarvortrag über Polytope

Gliederung

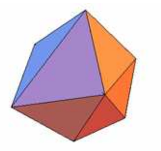


- Kennenlernen von Polytopen

- Volumenberechnung bei bestimmten Polytopen
  - Ehrhartpolynom
  - Anwendung im Zweidimensionalen



Was ist ein Polytop?



Definition 1. 1:

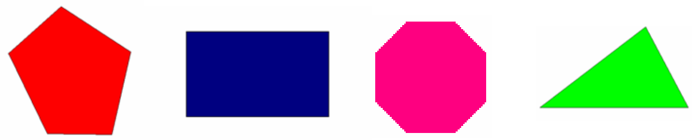
Eine Teilmenge $Q \subset V$ heißt **Polytop**, wenn es endlich viele Punkte $p_0, \ldots, p_N \in V$ gibt, so dass $Q = \mathrm{Kon}(p_0, \ldots, p_N)$ gilt.

dim (Q) = Dimension des kleinsten affinen Unterraums, der Q enthält, also $\dim(\mathrm{Aff}(p_1 - p_0, \ldots, p_N - p_0))$.

Spezialfall:

Eine Teilmenge $S \subset V$ heißt **k -Simplex**, wenn es affin linear unabhängige Punkte $p_0, \ldots, p_k \in V$ gibt, so dass

$S = \mathrm{Kon}(p_0, \ldots, p_k)$ gilt.



Eigenschaften:

Ein Polytop hat **Ecken** (=Extremalpunkte).

Es gilt: $E(Q) \subset \{p_0, \ldots, p_N\}$

Spezialfall k-Simplex: Alle Punkte $p_0, \ldots, p_k$ sind Ecken.

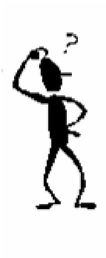
Korollar 1.2:

Die Menge $\{p_0, \ldots, p_N\}$ ist genau dann ein minimales Aufspannsystem von Q, wenn die Punkte $p_0, \ldots, p_N$ extremal und paarweise verschieden sind.

Was ist ein Polytop?

Weitere Eigenschaften:

Ein Polytop hat **innere Punkte**.



Wie können diese beschrieben werden???

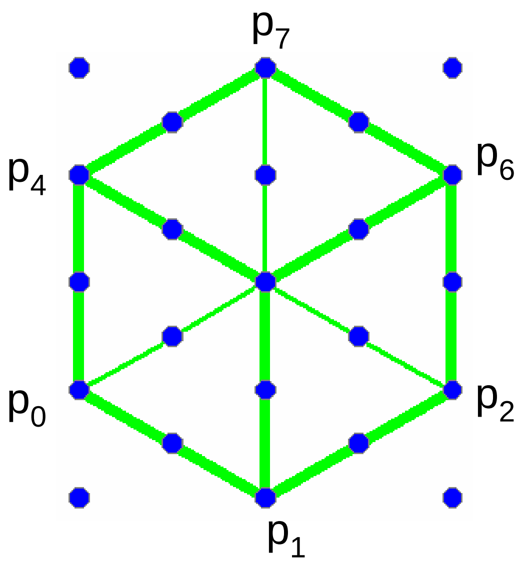
Beispiel

Dieser Würfel sei unser Polytop

Q = Kon (   )

mit Dimension von Q

dim (Q) =



Wie erreichen wir Punkte innerhalb von Q z.B.

- den Mittelpunkt einer Seitenfläche?
- den Punkt p, der auf einer Seitendiagonalen genau zwischen Seitenmittelpunkt und Eckpunkt liegt?
- den Mittelpunkt des Würfels?

Was gilt für alle diese Gleichungen?

Konvexkombinationen

Die inneren Punkte eines Polytops können durch so genannte Konvexkombinationen beschrieben werden.

Definition 1.3:

Für $p_0, \ldots, p_N \in V$ ist eine **Konvexkombination** eine Linearkombination der Form

$$\lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_N p_N$$

wobei $\lambda_i \geqslant 0$ für $i = 0, \ldots, N$ und $\lambda_0 + \ldots + \lambda_N = 1$.

Notiz 1.4:

Ist $K \subset V$ konvex, so liegt jede Konvexkombination von Punkten aus K in K.
Sind also $p_0, \ldots, p_N \in K$, so gilt $\lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_N p_N \in K$ für alle $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_i \geqslant 0$ und $\lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_N p_N = 1$.

Korollar 1.5:

Für eine nichtleere Menge $M \subset V$ ist Kon (M) gleich der Menge der Konvexkombinationen über M.

Notiz 1.6:

(a) In einem k -Simplex $S = \mathrm{Kon}(p_0, \ldots, p_k)$ ist jeder Punkt p von S als Konvexkombination

$$p = \lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_k p_k$$

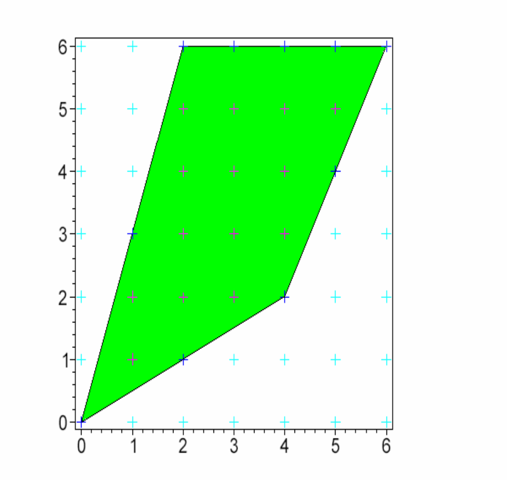
eindeutig darstellbar.

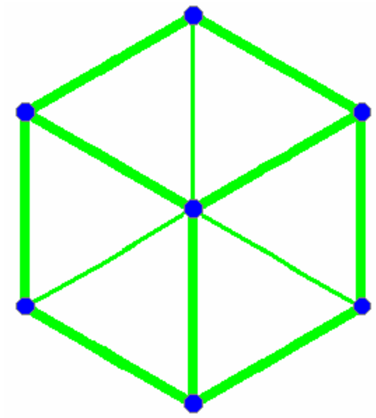
(b) Jedes Polytop ist kompakt.

Satz 1.7: Satz von Carathéodory

Ist $Q = \mathrm{Kon}(p_0, \ldots, p_N) \in V$ ein Polytop der Dimension k, so ist jeder Punkt $p \in Q$ eine Konvexkombination von (k+1) der gegebenen Punkte, die Q definieren.

Wie bestimmt man das Volumen eines Gitterpolytops?





Gitter verfeinern = Objekt vergrößern

➡ Gesucht: $\#(t\,\Delta \cap \mathbb{Z}^n)$ $t \in \mathbb{N}_0$

Theorem 2.1: **Das Ehrhart Polynom**

Sei Δ ein n-dimensionales Gitterpolytop in $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Für alle ganzen Zahlen $t \geqslant 0$ gilt:

$$E_\Delta(t) = \#(t\,\Delta \cap \mathbb{Z}^n)$$

b) Der führende Koeffizient von E_Δ ist das Volumen von Δ.

c) Das Polynom $E_\Delta(t)$ ist vom Grad n.

d) Bezeichne mit $\mathrm{int}(\Delta)$ das Innere von Δ, dann gilt für alle ganzen Zahlen $t > 0$:

$$E_\Delta(-t) = (-1)^n \;\#(\mathrm{int}(t\,\Delta) \cap \mathbb{Z}^n).$$

(Reziprozitätsgesetz)

Anwendung im Zweidimensionalen

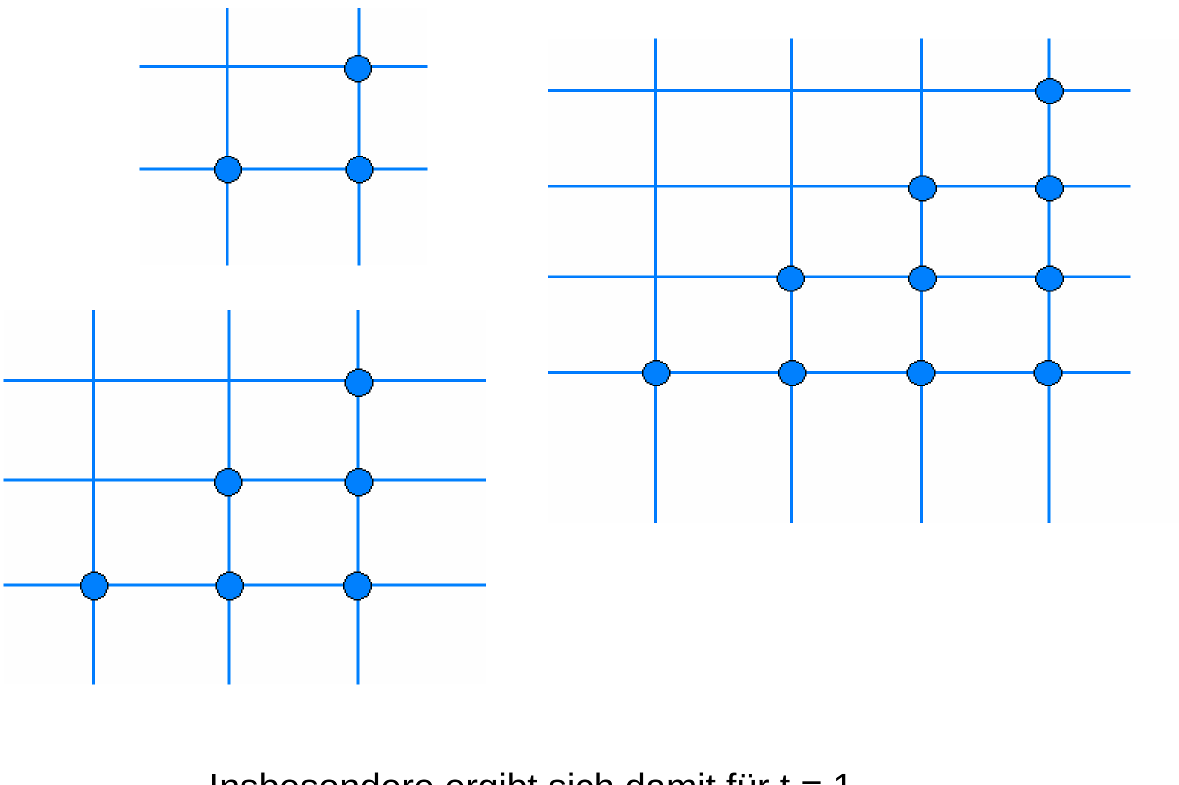
Sei Δ ein zweidimensionales Polytop (Polygon), dann ist das

Ehrhart Polynom

$$E_\Delta(t) = A(\Delta)\, t^2 + Bt + C,$$

wobei $A(\Delta)$ die Fläche von Δ bezeichnet,
B und C sind noch zu bestimmen.

<u>Beispiel:</u>



Insbesondere ergibt sich damit für $t = 1$
die ***Pick´sche Formel***

$$\boxed{A(\Delta) = \#(\Delta \cap \mathbb{Z}^n) - \tfrac{1}{2}\#(\partial \Delta \cap \mathbb{Z}^n) - 1}$$