Bernadette Mayer, Natalie Leiser 5. Juni 2007

Das Volumen eines Gitterpolytops

Ziel: Berechnung des Volumens eines Gitterpolytops mithilfe der Anzahl der ganzzahligen Punkte des Polytops.
Die Anzahl der ganzzahligen Punkte des Polytops kann durch ein Polynom, das Ehrhart Polynom beschrieben werden.

Satz von Ehrhart:

Sei Δ ein n-dimensionales Gitterpolytop in Z^n.
Dann gibt es ein eindeutiges Polynom E_Δ (das **Ehrhart Polynom**) mit Koeffizienten in Q, mit folgenden Eigenschaften:

a) Für alle ganzen Zahlen $t \geq 0$ gilt: $E_\Delta(t) = \#(t\Delta \cap Z^n)$

b) Der führende Koeffizient von E_Δ ist das Volumen von Δ.

c) Das Polynom $E_\Delta(t)$ ist vom Grad n.

Beweis:

Das Gitter Z^n werde von den Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ erzeugt. Das Gitter Z^{n+1} werde von den Einheitsvektoren $e_0, e_1, \ldots, e_n$ erzeugt.

Seien $u_0, u_1, \ldots, u_n$ die Eckpunkte des geschlossenen Simplexes σ Z^n Z^{n+1},

Betrachte das Simplex $\sigma := e_0 + \sigma$ mit Eckpunkten $v_i = e_0 + u_i$ für $0 \leq i \leq n$.

Die Vektoren $v_0, v_1, \ldots, v_n$ erzeugen ein
Untergitter M von Z^{n+1}.
Das Untergitter M habe den Rang h.
d.h. $card\left(Z^{n+1}/M\right) = h$

Die Vektoren $v_0, v_1, \ldots, v_n$ erzeugen ein
Parallelotop π.
π ist die Grundmasche des Untergitters M.

Es gilt:

$$\mathrm{Vol}\,(\pi) = h$$

Sei die Menge T ein **vollständiges**
Repräsentantensystem von Z^{n+1}/M
mit Elementen x π d.h.

$$x = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \cdot v_i$$

mit $0 \leq \mu_i < 1$ $i = 0, 1, \ldots, n$

$t\sigma$ bezeichne den Simplex mit
den Eckpunkten $t\,v_o$, $t\,v_1, \ldots, t\,v_n$.

Jeder Punkt y ist kongruent modulo M zu genau
einem Punkt von T.
d.h. es gilt:

$$y = x + \sum_{i=0}^{n} m_i \cdot v_i$$

mit geeigneten ganzen Zahlen $m_i \geq 0$.

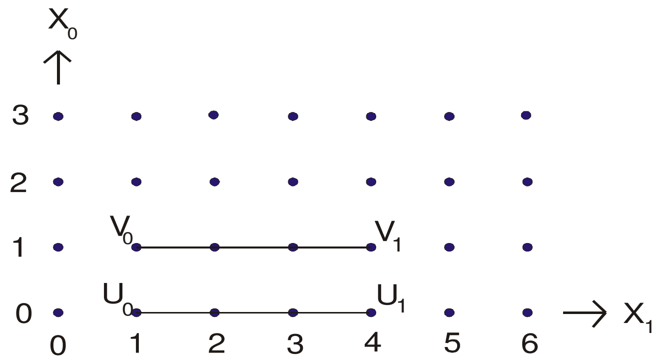
<u>Beispiel:</u> **Sei $n = 1$**

Z wird von $e_1 = 1$, Z^2 wird von $e_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $e_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ erzeugt.

Sei $u_0=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $u_1=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

⇨ $v_0 = e_0 + u_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

⇨ $v_1 = e_1 + u_1 = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$



σ ist die Strecke zwischen u_0 und u_1,

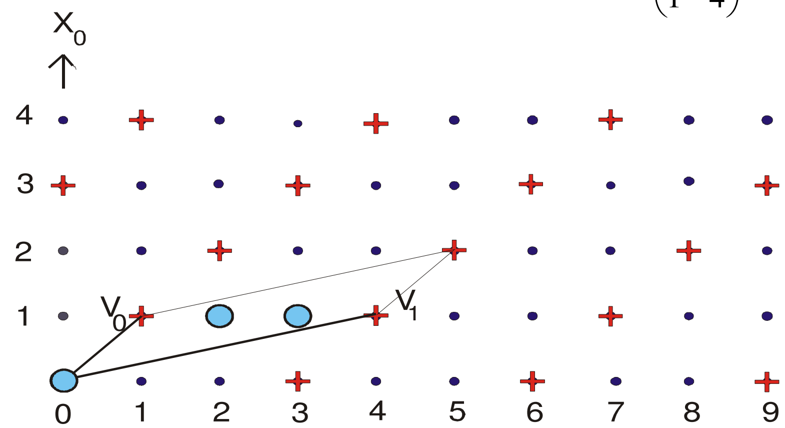
σ ist die Strecke zwischen v_0 und v_1.

Das Untergitter M von Z^2 wird von v_0 und v_1 erzeugt und ist in der Abbildung mit roten Kreuzen gekennzeichnet.

$Z^2/M = \{M, x^{(1)} + M, x^{(2)} + M\}$, wobei $x^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $x^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

Der Index des Untergitters M beträgt 3 d.h. h = 3.
π wird von den Vektoren v_0 und v_1 erzeugt wird.

Es gilt: Vol (π) = h = $\left| \det\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 4\end{pmatrix} \right|$ = 3



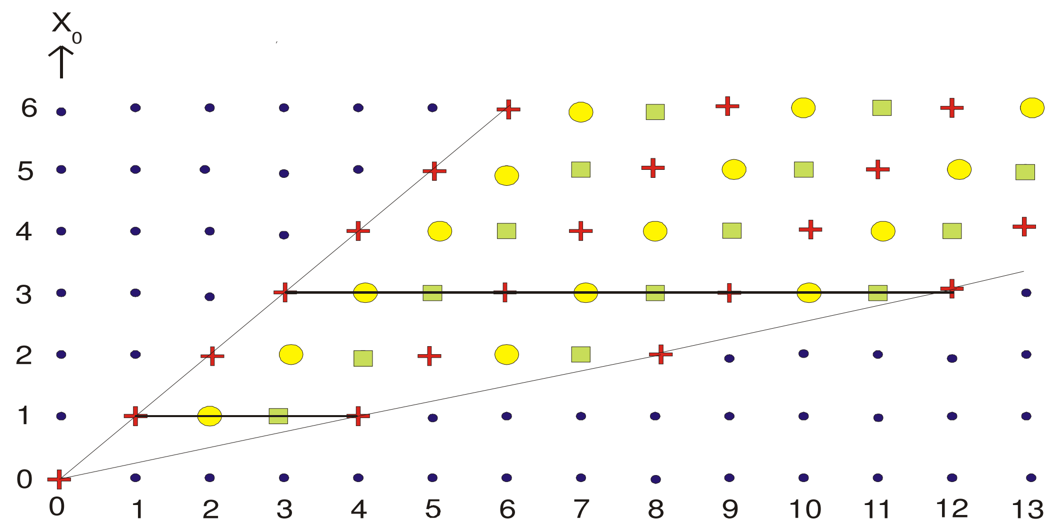
Das Repräsentantensystem T besteht hier aus den 3 Punkten $x^{(0)}, x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ wobei

$$x^{(0)} = \mu_0 v_0 + \mu_1 v_1 = \mu_0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu_1\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \mu_0 v_0 + \mu_1 v_1 = \mu_0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu_1\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \mu_0 v_0 + \mu_1 v_1 = \mu_0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu_1\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

Sei t = 3 d.h. wir betrachten das Simplex 3 σ, das sich in der $x_0 = 3$ Ebene befindet.



$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}; \qquad y^{(0)} = x^{(0)} + \sum_{i=0}^{n} m_i v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot v_0 + 1 \cdot v_1$$

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}; \qquad y^{(1)} = x^{(1)} + \sum_{i=0}^{n} m_i v_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot v_0 + 2 \cdot v_1$$

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}; \qquad y^{(2)} = x^{(2)} + \sum_{i=0}^{n} m_i v_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot v_0 + 1 \cdot v_1$$

d.h.alle mit + gekennzeichneten Punkte sind kongruent $x^{(0)}$ modulo M

alle mit gekennzeichneten Punkte sind kongruent $x^{(1)}$ modulo M

alle mit gekennzeichneten Punkte sind kongruent $x^{(2)}$ modulo M