1 Affine Geometrie

Def.: *Vor.:* K Kp., V VR. über K, $U \subset V$ UVR., $p \in V$

$A = p + U := \{x \in V; \exists u \in U : x = p + u\}$
A: ein zu A **paralleler affiner Unterraum**
U: zu A eindeutig bestimmter **Richtungsraum**
$\dim A := \dim U$

Bem.: U definiert auf V die Kongruenzrelation: $x \equiv y \mod U \Leftrightarrow x - y \in U$
mit den zu U parallelen affinen Unterräumen als Äquivalenzklassen.

Notiz:
- Sind A und B affine Unterräume von V, die zu U parallel sind, so sind A und B entweder gleich oder disjunkt.
- $A \subset V$ UVR. $\Leftrightarrow$ $A \subset V$ affiner UR. und $0 \in A$
- $q \in p + U \Rightarrow q + U = p + U$
- $A \in V$ aff. UR. parallel zu U
  $\Rightarrow$ für $q \in V$ ist $q + A \subset V$ aff. UR. und parallel zu U

Satz: *Vor.:* Es sei $V = K^n$ der Raum der n-Tupel über K

Beh.: Die aff. UR $A = p + U$ sind genau die Lösungsmengen der lösbaren inhomogenen linearen Gleichungssysteme
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$ für $i = 1, \ldots, m$

Satz: *Vor.:* $p_0, \ldots, p_n \in V$

Beh.: $\text{Aff}(p_0, \ldots, p_n) := \left\{ x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot p_i; \lambda_i \in K, \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$
Dann ist $\text{Aff}(p_0, \ldots, p_n)$ der kleinste affine Unterraum A von V mit $p_0, \ldots, p_n \in A$ und heißt die **affine Hülle** von $(p_0, \ldots, p_n)$.

Bsp.: *Vor.:* $A \subset V$ aff. UR., $q_1, q_2 \in A$: $q_1 \neq q_2$ disjunkte Punkte

Beh.: $\text{Aff}(q_1, q_2) \subset A$ ist die Gerade durch q_1 und q_2.

Def.: Ein System $(p_0, \ldots, p_k)$ vom Punkten $p_i \in V$ heißt **affin linear unabhängig**, wenn die Vektoren $(p_1 - p_0, \ldots, p_k - p_0)$ linear unabhängig sind.

Eig.: $\dim \text{Aff}(p_0, \ldots, p_k) = k \Leftrightarrow (p_0, \ldots, p_k)$ affin linear unabhängig

Satz: *Vor.:* $A = p + U$, $A' = p' + U'$ aff. UR mit $U \subset V$ und $U' \subset V$

Beh.: $A \cap A' = \emptyset$ oder $A \cap A'$ aff. UR parallel zu $U \cap U'$.

Notiz: *Vor.:* $A = p + U$, $A' = p' + U'$ aff. UR vom V, $U \subset U'$

Beh.: $A \cap A' = \emptyset$ oder $A \subset A'$. A und A' heißen parallel

Notiz: *Vor.:* $p, q_1, \dots, q_n$ Punkte in V

a) Sei $U = \langle q_1, \dots, q_n \rangle$ der von $(q_0, \ \dots, \ q_n)$ aufgespannte UVR
$\Rightarrow \quad p + U = \text{Aff}(p, p + q_1, \dots, p + q_n)$

b) $(q_0, \ \dots, \ q_n)$ ist eine Basis von U
$\Rightarrow \forall x \in \text{Aff}(p, p + q_1, \dots, p + q_n) \ \exists! \lambda_i \in K : \ x = p + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i$

Def.: *Vor.:* V, W VR. über K, $p \in W$ Pkt., $\varphi : V \to W$ lin. Abb.

$f = p + \varphi : V \to W; \ x \mapsto f(x) := p + \varphi(x)$
heißt **affine Abbildung** von V nach W

Notiz: *Vor.:* $f : V \to W$ aff. Abb., $A \subset V$, $B \subset W$ aff. UR.

Beh.: $f(A) \subset W$ aff. UR. und
$f^{-1}(B) \subset V$ ist leere Menge oder aff. UR von V

Def.: *Vor.:* $f = p + \varphi : V \to V$ mit $p \in V$, $\varphi \in \text{GL}(V)$

f heißt **affiner Automorphismus** von V

Bem.: f sind dann bij. und f^{-1} auch ein aff. Automorph. vom V

Notiz: Die aff. Automorph. von V bilde eine Ugp. der Gp. aller bij. Abb. von V auf V. Diese Gruppe bezeichnet man mit $A(V)$.

Def.: Für $\varphi = \text{id}_V$ erhält man die Ugp. $T(V) = \{f = p + \text{id}_V; \ p \in V\} \subset A(V)$ der **Translationen** $\tau_p : V \to V; \ x \mapsto \tau(x) = p + x$.

Notiz: Die Abb. $V \to A(V); \ p \mapsto \tau_p$ liefert einen Gp.-isomorph. von V nach $T(V)$. $T(V)$ist eine kommutative Gp. bij. Abb. von V auf V.

Bem.: Die Gp. $T(V)$ operiert einfach transitiv auf V,
d.h. es gibt genau ein $\tau_p \in T(V)$ mit $\tau_p(x) = y$.

2 Konvexe Mengen

Bem.: Im folgenden sei V stets ein euklidischer VR. mit dim$V = n$ und Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$, das durch Einschränkung auf seine UVR. übertragen wird, sodass auch diese in kanonischer Weise eukl. VR. sind.
Für die disjunkten Pkt. $p, q \in V: \quad q \neq q$ betrachte man die Tmgn.:
$\overline{p,q} := \{p + \lambda\,(q-p)\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ Gerade durch p und q
$[p,q] := \{p + \lambda\,(q-p)\,;\ \lambda \in [0,1]\}$ Strecke von p nach q

Def.: Eine Tmg. $K \subset V$ eines reellen Raumes heißt **konvex**, wenn $[p,q] \subset K\ \forall p,q \in K$ gilt. Die Dimension einer konvexen Tmg. K ist die Dimension des kleinsten affinen Unterraumes, der K enthält.
Ein **Halbraum** $H \subset V$ ist eine Tmg. der Form $H := \{x \in V | \varphi(x) \geq b\}$, wobei $\varphi: \ V \mapsto \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit $\varphi \neq o$ und $b \in \mathbb{R}$ ist.

Bem.:
a) Jeder Halbraum ist konvex.
b) Jeder Durchschnitt konvexer Tmg. ist konvex.
c) Der Lösungsraum eines ´linearen Ungleichungssystem ist konvex.

Def.: $M \subset V$ Tmg.
Die **konvexe Hülle** ist die kleinste konvexe Tmg. von V, die M enthält.
$$\mathrm{Kon}(M) := \bigcap_{\substack{M \subset K \subset V \\ \text{konvex}}} K$$

Def.: $K \subset V$ konvexe Tmg.
Ein Punkt $p \in K$ heißt **Extremalpunkt** oder auch **Ecke** von K, wenn p nicht innerer Punkt einer Strecke $[p_1, p_2]$ mit $p_1, p_2 \in K$ ist.
$E(K) := \{p \in K; p \text{ Ecke von } K\}$

Notiz: $k \subset V$ konvexe Menge
$p \in K$ Extremalpunkt $\Leftrightarrow \ K - \{p\}$ konvex

Lem.: *Vor.:* $K \subset V$ konvexe Tmg. $\varphi : V \mapsto \mathbb{R}$ linear
$x_0 \in K$ Minimum von $\varphi|_K$
$b_0 := \varphi(x_0) = \min\{\varphi(x);\ x \in K\}$
$K' := \{x \in K; \varphi(x) = b_0\}$
Beh.: $p \in K'$ innerer Pkt. von $[q_1, q_2]$ mit $q_1, q_2 \in K \quad \Rightarrow \quad q_1, q_2 \in K'$
Insbesondere: Jede Ecke von K' ist auch eine Ecke von K:
$E(K') \subset E(K)$

Satz: *Vor.:* $K \subset V$ kompakte konvexe Tmg.

a) K besitzt mindestens einen Extremalpunkt
b) Jedes lineare Funktional nimmt in einer Ecke von K sein Minimum auf K an: $\exists$ Ecke $p \in K:\ \psi(p) = \min\{\psi(x); x \in K\}$

Lem.: *Vor.:* $K \subset V$ abgeschlossene konvexe Menge

a) $\forall q \in V\ \exists! p \in K:\ |p - q| = \min\{|x - q|; x \in K\}$
b) $(y, q - p) \leq (p, q - p)\ \forall y \in K$
c) Sei $\pi(q) = p$, so ist die Abb. $\pi:\ V \mapsto K$ stetig.
Genauer gilt: $|\pi(q_1) - \pi(q_2)| \leq |q_1 - q_2|$

Satz: **Trennungslemma**
Vor.: $K \subset V$ abgeschlossene konvexe Menge
$q \in V - K$ und $p := \pi(q)$ (s.o.)
Beh.: $H := \{y \in V;\ (y, q - p) = (p, q - p)\}$ ist affine Hyperebene
Die konvexe Menge K liegt auf einer Seite von H.
Die Abb. $\varphi : V \mapsto \mathbb{R},\ \varphi(y) := (y, q - p)$ ist linear, hat in $y = p$ ihr Maximum auf K und $\varphi(q) > \varphi(p)$

Satz: **Minkowski**
Vor.: $K \subset V$ kompakte konvexe Tmg.
$E(K)$ Menge der Extremalpunkte
Beh.: $K = \mathrm{Kon}(E(K))$

Bem.: $E(K)$ muss nicht abgeschlossen sein.