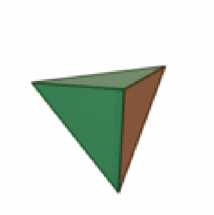
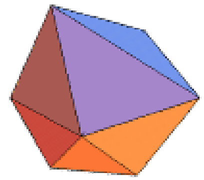
Michaela Riesenberg 8. Mai 2007



Polytope



◊ Was ist ein Polytop?

Definition 1.1: Eine Teilmenge $Q \subset V$ heißt **Polytop**, wenn es endlich viele Punkte $p_0, \ldots, p_N \in V$ gibt, so dass $Q = \mathrm{Kon}(p_0, \ldots, p_N)$ gilt.

Die Dimension eines Polytops ist die Dimension des kleinsten affinen Unterraums, der Q enthält, also die Dimension des von $(p_1 - p_0, \ldots, p_N - p_0)$ aufgespannten Untervektorraums.

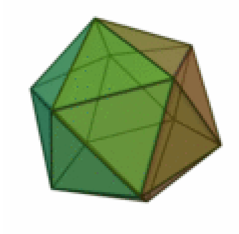
Spezialfall: Eine Teilmenge $S \subset V$ heißt *k -Simplex*, wenn es affin linear unabhängige Punkte $p_0, \ldots, p_k \in V$ gibt, so dass $S = \mathrm{Kon}(p_0, \ldots, p_k)$ gilt.

Eigenschaften: Ein Polytop hat **Ecken** (=Extremalpunkte).
In dem Polytop $Q = \mathrm{Kon}(p_0, \ldots, p_N)$ brauchen jedoch nicht alle $p_0, \ldots, p_N$ Ecken zu sein.

Es gilt: $E(Q) \subset \{p_0, \ldots, p_N\}$ (Spezialfall k-Simplex: Alle Punkte $p_0, \ldots, p_k$ sind Ecken)

Korollar 1.2: Ist $Q = \mathrm{Kon}(p_0, \ldots, p_N)$ ein Polytop, so ist Q die konvexe Hülle seiner Extremalpunkte, die eine Teilmenge von $\{ p_0, \ldots, p_N\}$ bilden. (*Satz von Minkowski*)
Die Menge $\{ p_0, \ldots, p_N \}$ ist genau dann ein minimales Aufspannsystem von Q, wenn die Punkte $p_0, \ldots, p_N$ extremal und paarweise verschieden sind.

Wie bisher gilt: V sei stets ein euklidischer Vektorraum mit endlicher Dimension n.



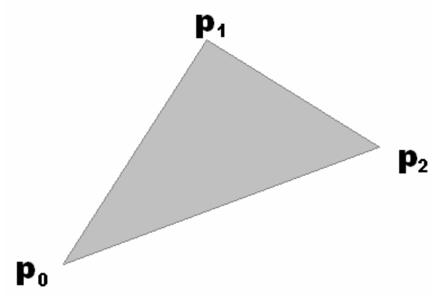
Weitere Eigenschaften: Ein Polytop hat **Seitenflächen und Kanten**.

Ein Polytop hat innere Punkte.
Diese Punkte können durch so genannte Konvexkombinationen beschrieben werden.

Definition 1.3.: Für $p_0, \ldots, p_N \in V$ ist eine **Konvexkombination** eine Linearkombination der Form

$$\lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_N p_N$$

mit den Bedingungen $\lambda_i \geqslant 0$ für $i = 0,\ldots N$ und $\lambda_0 + \ldots + \lambda_N = 1$.



Notiz 1.4: Ist $K \subset V$ konvex, so liegt jede Konvexkombination von Punkten aus K in K.

Sind also $p_0,\ldots, p_N \in K$, so gilt $\lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_N p_N \in K$ für alle $\lambda_i \in \mathbb{R}$

mit $\lambda_i \geqslant 0$ und $\lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_N p_N = 1$.

Korollar 1.5: Für eine nichtleere Menge $M \subset V$ ist die Menge der Konvexkombinationen über M gleich Kon(M).

Notiz 1.6: (a) Jedes Polytop ist kompakt.

(b) In einem k -Simplex $S = \mathrm{Kon}(p_0, \ldots, p_k)$ ist jeder Punkt p von S als Konvexkombination

$$p = \lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_k p_k$$ eindeutig darstellbar.

Satz 1.7: **Satz von Carathéodory**

Ist $Q = \mathrm{Kon}(p_0, \ldots, p_N) \in V$ ein Polytop der Dimension k, so ist jeder Punkt $p \in Q$ eine Konvexkombination von (k+1) der gegebenen Punkte, die Q definieren.

◊ Wie kann man das Volumen bestimmter Polytope bestimmen?

Man betrachtet hier **Gitterpolytope**, das sind Polytope, deren Ecken ganzzahlige Koordinaten aufweisen.

Das Ziel ist, aus der Anzahl der Schnittpunkte des Polytops mit den Gitterpunkten von $\mathbb{Z}^n$ das Volumen zu erhalten.

Theorem 2.1: Sei Δ ein n-dimensionales Gitterpolytop in $\mathbb{R}^n$.

Dann gibt es ein eindeutiges Polynom E_Δ (das **Ehrhart Polynom**) mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$, mit folgenden Eigenschaften:

a) Für alle ganzen Zahlen $t \geqslant 0$ gilt: $E_\Delta (t) = \# (t\,\Delta \cap Z^n)$ (∗)

b) Der führende Koeffizient von E_Δ ist das Volumen von Δ.

c) Das Polynom $E_\Delta (t)$ ist vom Grad n.

d) Bezeichne mit int(Δ) das Innere von Δ, dann gilt für alle ganzen Zahlen $t > 0$:

$$E_\Delta (-t) = (-1)^n \; \# (\mathrm{int}(t\,\Delta) \cap Z^n). \qquad (**)$$

(Reziprozitätsgesetz)

Beispiel im Zweidimensionalen:

Sei Δ ein zweidimensionales Polytop (Polygon), dann ist das Ehrhart Polynom

$$E_\Delta(t) = A(\Delta)t^2 + Bt + C, \qquad (***)$$

wobei $A(\Delta)$ die Fläche von Δ bezeichnet, B und C sind noch zu bestimmen.

→ Bestimmen von C: $E_\Delta(0) = \#(0^* \Delta \cap M) = 1 = C.$

→ Bestimmen von B: Wenn wir mit $\partial \Delta$ den Rand von Δ bezeichnen, dann gilt

$$E_\Delta(1) \overset{(*)}{=} \#(\Delta \cap M) = \#(\mathrm{int}(\Delta) \cap M) + \#(\partial \Delta \cap M) \overset{(**)}{=} E_\Delta(-1) + \#(\partial \Delta \cap M),$$

Aus $(***)$ folgt $E_\Delta(1) = A(\Delta) + B + 1$ und $E_\Delta(-1) = A(\Delta) - B + 1.$

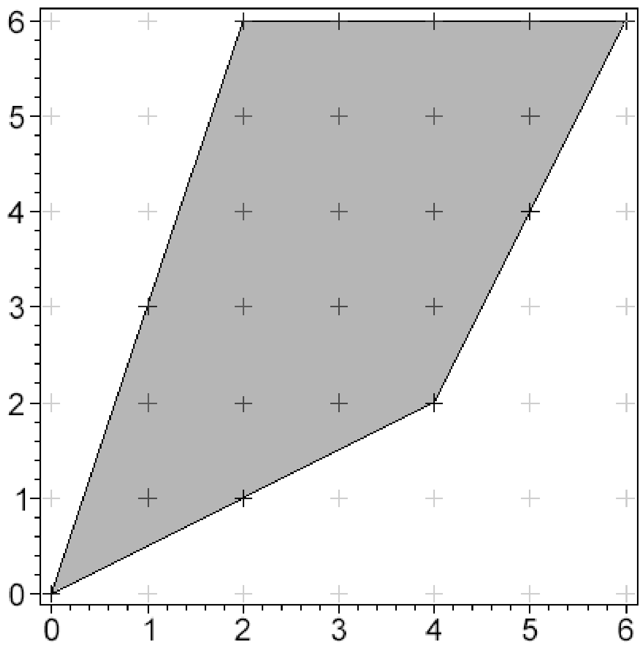
Also $E_\Delta(1) = A(\Delta) + B + 1 = E_\Delta(-1) + \#(\partial \Delta \cap M) = A(\Delta) - B + 1 + \#(\partial \Delta \cap M)$

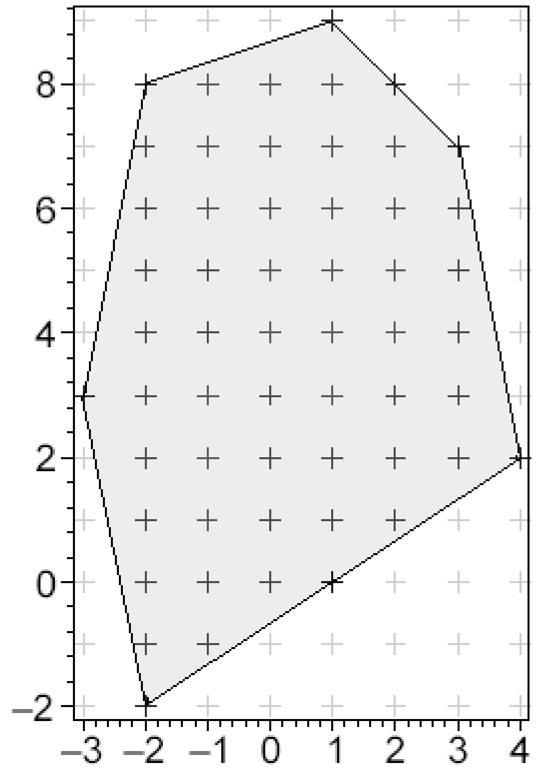
Daraus folgt: $B = \frac{1}{2} \#(\partial M \cap M).$

Insbesondere ergibt sich damit aus $(***)$ für $t = 1$ die ***Pick´sche Formel***

$$\boxed{A(\Delta) = \#(\Delta \cap M) - \tfrac{1}{2}\#(\partial \Delta \cap M) - 1}$$

Beispiele





$\#(\Delta \cap M)$ =

$\#(\partial M \cap M)$ =

$A(\Delta)$ =

$\#(\Delta \cap M)$ =

$\#(\partial M \cap M)$ =

$A(\Delta)$ =