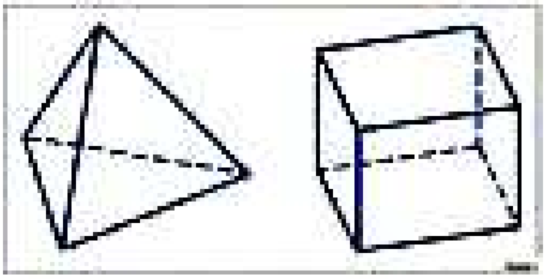
Seminarvortrag

Polyeder



22.Mai.2007

von
Renate Rist

Polyeder

Alle Teilmengen $K \subset V$ seien im Vortrag als konvexe Teilmengen vorausgesetzt. Der Vektorraum V wird stets als euklidischer Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit endlicher Dimension n verwendet.

Was ist ein Polyeder?

Definition 1. Gegeben seien endlich viele lineare Funktionale
$\varphi_1, \ldots, \varphi_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $b_1, \ldots, b_M \in \mathbb{R}$.
Dann heißt

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n; \varphi_i(x) \geq b_i \text{ für } i = 1, \ldots, M\}$$

ein Polyeder.

Bemerkung 1. Ein Polyeder P kann aufgefasst werden

- als die Lösung eines linearen Ungleichungssystems
- als Schnitt von Halbräumen.

Kompakte Polyeder $\subseteq$ Polytope

Im Folgenden sei P stets das Polyeder
$P := \{x \in \mathbb{R}^n; \varphi_i(x) \geq b_i \text{ für } i = 1, \ldots, M\}$
mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $b_1, \ldots, b_M \in \mathbb{R}$.

Lemma 1.
$X \subset \mathbb{R}^n$ sei affiner Unterraum mit $\dim X \geq 1$. Sei $P \subset X$ ein Polyeder.
Ist $p \in E(P)$, dann existiert mindestens ein $i \in \{1, \ldots, M\}$
mit $\varphi_i(p) = b_i$ und ein $x \in X$ mit $\varphi_i(x) \neq b_i$.

Satz 1 (Eckenkriterium)**.** Sei P ein Polyeder,
dann sind für jeden Punkt $p \in P$ folgende Aussagen äquivalent:

1. p ist Ecke von P

2. Es gibt Indizes $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, M\}$ so, dass $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n})$ eine Basis des Dualraums $(\mathbb{R}^n)^*$ ist und $\varphi_{i_1}(p) = b_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n}(p) = b_{i_n}$ gilt.

Insbesondere ist die Anzahl der Ecken von P endlich.

Korollar 1. Ist $P \subset \mathbb{R}^n$ ein kompaktes Polyeder, so ist P ein Polytop.

Polytope $\subseteq$ kompakte Polyeder

Definition 2. $C \subset \mathbb{R}^n$ mit C konvex, heißt *Kegel*, wenn gilt:

$$p \in C, \lambda \in \mathbb{R}_0^+ \Longrightarrow \lambda \cdot p \in C$$

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, dann gilt:

$$C := \mathrm{Con}(M) = \bigcap_{\substack{M \subset \Delta \subset \mathbb{R}^n \\ \text{Kegel}}} \Delta = \mathbb{R}_0^+ \cdot \mathrm{Kon}(M)$$

$\mathrm{Con}(M)$ ist der kleinste Kegel, der M enthält; M heißt *Erzeugendensystem* von C. Der Kegel C heißt *endlich erzeugt*, wenn C ein endliches Erzeugendensystem hat.

Bemerkung 2. Eine äquivalente Definition für den Kegel C ist:
$C \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Kegel, wenn gilt:

- $p \in C, \lambda \in \mathbb{R}_0^+ \Longrightarrow \lambda \cdot p \in C$

- $p, q \in C \Longrightarrow p + q \in C$

Notiz 1. Seien $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\mathrm{Con}(p_1, \ldots, p_r) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n; p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{R}_0^+ \right\}$$

Notiz 2. Ein Polyeder, das außerdem noch ein Kegel ist, heißt *Polyederkegel*.
Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyederkegel mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dann gilt:

$$C := \{p \in \mathbb{R}^n;\ \varphi_i(p) \geq 0,\ i = 1, \ldots, M\}$$

Definition 3. Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ ein Kegel. Dann wird

$$C^* := \{y \in \mathbb{R}^n; \langle x, y \rangle \geq 0 \text{ für alle } x \in C\}$$

der *duale Kegel* zu C und

$$C^{**} := (C^*)^* = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, y \rangle \geq 0 \text{ für alle } y \in C^*\}$$

der *biduale Kegel* genannt.

Lemma 2.
Sei C ein Kegel, dann gilt:
a) C^* ist ein abgeschlossener Kegel.
b) $C \subset C^{**}$. Ist C abgeschlossen, so ist $C^{**} = C$.
c) Ist C endlich erzeugt, so ist C^* ein Polyederkegel.

Satz 2. C ist genau dann ein Polyederkegel, wenn C endlich erzeugt ist.

Satz 3. Jedes Polytop ist auch ein kompaktes Polyeder.

Der Darstellungssatz

Satz 4 (Darstellungssatz)**.**
Ist P ein Polyeder mit $P := \{x \in \mathbb{R}^n; \varphi_i(x) \geq b_i$ für $i = 1, \ldots, M\}$, dann existiert ein Polytop Q und ein Polyederkegel C mit

$$P = Q + C$$

Der Polyederkegel C ist eindeutig bestimmt durch

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \varphi_i(x) \geq 0,\ i = 1, \ldots, M\}$$

.