Der Eulersche Polyedersatz in beliebiger Dimension

Rolf Stefan Wilke

17. Juli 2007

Definition. Sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein Polytop der Dimension d. Es bezeichne $f_k(P)$ die Anzahl der k-dimensionalen Seitenflächen. Die Summe

$$\chi(P) := \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k f_k(P)$$

nennen wir die *Euler-Charakteristik* von P. Zählt man das Polytop P selbst als d-dimensionale Seitenfläche mit hinzu (also $f_d(P) = 1$), so schreibt man auch

$$\tilde{\chi}(P) := \sum_{k=0}^{d} (-1)^k f_k(P) = \chi(P) + (-1)^d$$

Wir wollen das folgende Theorem beweisen; der Beweis sowie alle Abbildungen sind aus [G67, Ch. 8] entnommen:

Theorem (Eulerscher Polyedersatz). *Für die Euler-Charakteristik eines d-dimensionalen Polytops gilt:*

$$\chi(P) = 1 - (-1)^d \ \textit{bzw.} \ \tilde{\chi}(P) = 1 \tag{$*$}$$

Der Fall $d = 0$ ist trivial. Der Fall $d = 1$ ist klar: Ein 1-dimensionales Polytop ist gerade ein Streckensegment mit zwei Endpunkten; also $f_0(P) = 2$ und $f_1(P) = 1$; somit $f_0(P) - f_1(P) = 1$.
Der Fall $d = 2$ ist ebenfalls klar: Ein 2-dimensionales Polytop ist gerade ein Vieleck mit n Ecken und n Kanten; also $f_0(P) = n = f_1(P)$, mit $f_2(P) = 1$ ergibt sich $f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) = 1$.
Der Fall $d = 3$ ist der klassische Fall; ein direkter Beweis wurde ja im Vortrag von Ulrich Hoenes bereits geführt.

Bemerkung. Für ein d-Simplex $\sigma = \operatorname{conv}\{p_0, \dots, p_d\}$ lässt sich die Gleichung $(*)$ auch elementar nachrechnen. Es gilt nämlich

$$f_k(\sigma) = \binom{d+1}{k+1} \tag{1}$$

Beweis. τ ist genau dann eine k-dimensionale Seitenfläche von σ, falls τ konvexe Hülle von $k+1$ Eckpunkten $p_{i_0}, \ldots, p_{i_k}$ für gewisse Indizes $i_0, \ldots, i_k$ ist. Es gibt nun genau $\binom{d+1}{k+1}$ Möglichkeiten, $k+1$ Ecken aus $d+1$ Ecken auszuwählen; damit folgt die Formel (1). Daraus folgt dann

$$\tilde{\chi}(\sigma) = \sum_{k=0}^{d}(-1)^k f_k(\sigma) = \sum_{k=0}^{d}(-1)^k \binom{d+1}{k+1} = -\sum_{k=1}^{d+1}(-1)^k \binom{d+1}{k}$$
$$= -(1-1)^{d+1} + 1 = 1 \quad \square$$

Wir betrachten zunächst die Euler-Charakteristik für ein *Prismoid.*

Definition. Seien Q_1, Q_2 Polytope von Dimension $\leqslant d-1$, und seien H_1, H_2 zwei verschiedene und zueinander parallele Hyperebenen mit $H_i \supset Q_i$. Falls $P := \operatorname{conv}\{Q_1, Q_2\}$ ein Polytop der Dimension d ist, so nennt man P ein *d-Prismoid.*

Lemma 1. *Sei P wie oben ein d-Prismoid, und sei H_0 eine parallele*[1] *Hyperebene zwischen H_1 und H_2, die mindestens einen inneren Punkt von P enthält (siehe Abbildung 1). Setze $P_0 := P \cap H_0$. Dann gilt:*

$$\chi(P) = \tilde{\chi}(Q_1) + \tilde{\chi}(Q_2) - \chi(P_0) \tag{2}$$

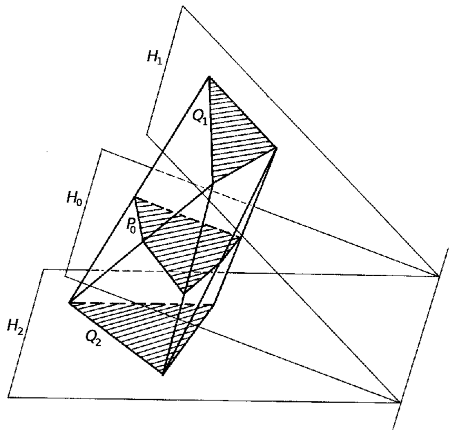

Abbildung 1: Verallgemeinertes Prismoid

[1] Die Forderung, dass die Hyperebenen H_0, H_1 und H_2 parallel sind, ist keine notwendige Bedingung. Die folgenden Sätze gelten auch unter schwächeren Voraussetzungen. Daher zeigt Abbildung 1 kein Prismoid im Sinne dieser Definition, ist aber für die Anschauung des Lemmas dennoch geeignet.

Beweis. Zunächst ist jede Ecke von P entweder eine Ecke von Q_1 oder eine Ecke von Q_2. Also gilt

$$f_0(P) = f_0(Q_1) + f_0(Q_2).$$

Falls F eine k-dimensionale Seite von P ist, so dass alle Ecken entweder in Q_1 oder in Q_2 sind, so ist F auch eine k-dimensionale Seite von Q_1 oder Q_2. Falls F Ecken sowohl mit Q_1 als auch mit Q_2 gemeinsam hat, dann ist $F \cap H_0$ eine $k-1$-dimensionale Seite von P_0. Umgekehrt stammt jede $k-1$-dimensionale Seite von P_0 von einer k-dimensionalen Seite von P. Damit folgt

$$f_k(P) = f_k(Q_1) + f_k(Q_2) + f_{k-1}(P_0).$$

Zusammensetzen der beiden Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned}
\chi(P) &= \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k f_k(P) \\
&= f_0(Q_1) + f_0(Q_2) + \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k (f_k(Q_1) + f_k(Q_2) + f_{k-1}(P_0)) \\
&= \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k (f_k(Q_1) + f_k(Q_2)) - \sum_{k=0}^{d-2} (-1)^k f_k(P_0) \\
&= \tilde{\chi}(Q_1) + \tilde{\chi}(Q_2) - \chi(P_0)
\end{aligned}$$

□

Korollar 1. *Gilt* $(*)$ *für* Q_1, Q_2 *und* P_0, *so auch für* P. *Dies ist insbesondere der Fall, falls* $(*)$ *für alle Polytope von Dimension* $\leqslant d-1$ *gilt.*

Beweis. Es ist

$$\chi(P) = 2 - (1 - (-1)^{d-1}) = 1 - (-1)^d.$$

□

Lemma 2. *Sei* P *ein Polytop der Dimension* d. *Sei* H_0 *eine Hyperebene, so dass* $H_0 \cap P$ *genau eine Ecke* v_0 *von* P *enthält. Seien* H^+ *und* H^- *die durch* H_0 *erzeugten abgeschlossenenen Halbräume. Setze* $P_0 := P \cap H_0$, $P^+ := P \cap H^+$, $P^- := P \cap H^-$ *(vgl. Abbildung 2). Dann gilt:*

$$\chi(P) = \chi(P^+) + \chi(P^-) - \tilde{\chi}(P_0) + (-1)^d \tag{3}$$

Beweis. Eine Ecke von P ist entweder eine Ecke von P^+ oder eine Ecke von P^-. Umgekehrt sind aber nur die Ecken von P^+ oder P^- auch Ecken von P, die nicht Ecken von P_0 sind (Ausnahme: Die Ecke v_0). Damit folgt:

$$f_0(P) = f_0(P^+) + f_0(P^-) - 2f_0(P_0) + 1.$$

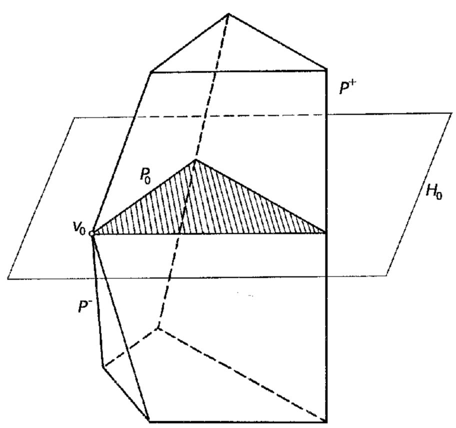

Abbildung 2: Zerlegung in P^+ und P^-

Eine Kante von P ist wiederum eine Kante von P^+ oder P^-, die nicht in P_0 liegt; oder eine Kante, die von einer Ecke von P_0 (Ausnahme: v_0) in eine Kante von P^+ und eine Kante von P^- aufgeteilt wird. Damit folgt:

$$f_1(P) = f_1(P^+) + f_1(P^-) - 2f_1(P_0) - f_0(P_0) + 1.$$

Analog ist eine k-dimensionale Seitenfäche von P $(2 \leqslant k \leqslant d-1)$ von P eine entsprechende Seitenfläche von P^+ oder P^-, die nicht in P_0 liegt; oder eine Seitenfläche, die von einer $k-1$-dimensionalen Seitenfläche von P_0 in jeweils eine k-dimensionale Seitenfläche von P^+ und P^- aufgeteilt wird. Damit gilt nun:

$$f_k(P) = f_k(P^+) + f_k(P^-) - 2f_k(P_0) - f_{k-1}(P_0)$$

Zusammensetzen der Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned}
\chi(P) &= f_0(P^+) + f_0(P^-) - 2f_0(P_0) + 1 \\
&\quad - (f_1(P^+) + f_1(P^-) - 2f_1(P_0) - f_0(P_0) + 1) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{d-1} (f_k(P^+) + f_k(P^-) - 2f_k(P_0) - f_{k-1}(P_0)) \\
&= \chi(P^+) + \chi(P^-) - 2\,\tilde{\chi}(P_0) + \chi(P_0) \\
&= \chi(P^+) + \chi(P^-) - \tilde{\chi}(P_0) + (-1)^d.
\end{aligned}$$

□

Korollar 2. *Gilt* $(*)$ *für* P^+, P^- *und* P_0, *dann auch für* P.

Beweis. Es ist

$$\chi(P) = 2(1-(-1)^d) - 1 + (-1)^d = 1 - (-1)^d.$$

□

Wir können nun den Eulerschen Polyedersatz beweisen:

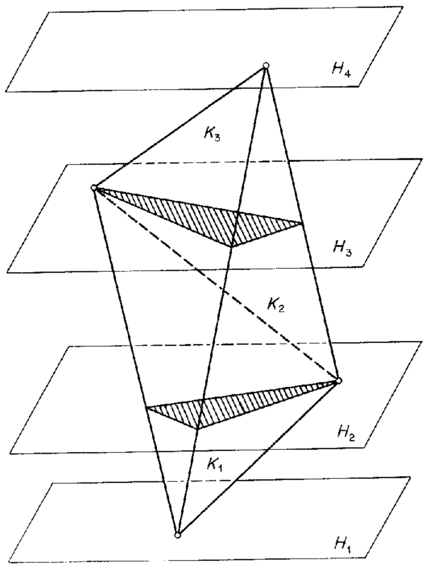

Abbildung 3: Zerlegung von P in Prismoide

Beweis. Wir nehmen an, dass der Eulersche Polyedersatz bereits für alle $k \leqslant d-1$ gezeigt ist. (Den Induktionsanfang für die Fälle $d = 0, 1, 2$ wurde ja bereits oben betrachtet). Sei also P ein Polytop der Dimension d. Wir wählen eine Hyperebene H so, dass alle zu H parallelen Hyperebenen höchstens eine Ecke von P enthalten. Ist $v := f_0(P)$, dann existieren also Hyperebenen $H_1, \ldots, H_v$, so dass H_i genau eine Ecke von P beinhaltet. Dabei seien die H_i so angeordnet, dass H_j zwischen H_i und H_k liegt, falls $i < j < k$ (vgl. Abbildung 3) .Definiere $P_i := P \cap H_i$, und für $1 \leqslant i \leqslant v-1$ bezeichne K_i das von P_i und P_{i+1} aufgespannte Prismoid. Nach Induktionshypothese gilt $(*)$ für jedes K_i nach Korollar 1. Jetzt definiere $K^{(j)} := \bigcup_{i=1}^{j} K_i$ für $1 \leqslant j \leqslant v-1$; insbesondere $K^{(1)} = K_1$. Jetzt können wir induktiv Korollar 2 anwenden für $P^+ = K_{j+1}$, $P^- = K^{(j)}$ und H_{j+1}. Damit gilt $(*)$ für alle $K^{(j)}$; insbesondere für $K^{(v-1)} = P$. Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Literatur

[G67] B. Grünbaum, Convex Polytopes, Vol. XVI of Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, London, 1967.