Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik SS 2008 – Blatt 02

Abgabetermin: Mittwoch 30.04.2008 um 08:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

Schreiben Sie bitte den Namen Ihres Übungsgruppenleiters und die Nummer Ihrer Übungsgruppe groß und deutlich auf Ihre Lösungen!

1. (a) Sind folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.
   i. $W_1 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\,,\, x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\}$.
   ii. $W_2 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\,,\, x_1 \geq 0\}$.
   iii. $W_3 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\,,\, x_1 = x_2 = -x_3\}$.

   (b) Untersuchen Sie, ob $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\,,\, f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\,\}$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.

2. Gegeben seien folgende Vektoren im $\mathbb{R}^4$:
$$a_1 := (1, 0, 0, -1), \quad a_2 := (0, 1, 0, -1), \quad a_3 := (0, 0, 1, -1), \quad a_4 := (-1, -1, 2, 0).$$
   Zeigen Sie:

   (a) Die Familie (a_1, a_2, a_3, a_4) ist linear abhängig.

   (b) $\langle\{a_1, a_2, a_3, a_4\}\rangle = \langle\{a_1, a_2, a_3\}\rangle$.

3. Gegeben seien im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren
$$v_1 = (4, 1, 1, 0, -2), \quad v_2 = (1, 1, 4, -1, 2),$$
$$v_3 = (4, 3, 9, -2, 2), \quad v_4 = (1, 1, 1, 1, 1), \quad v_5 = (0, -2, -8, 2, -4).$$
   Bestimmen Sie eine Basis von $V := \langle v_1, \ldots, v_5\rangle$.

4. Es sei V ein Vektorraum, und $U, U' \subset V$ Untervektorräume. Zeigen Sie, dass $U \cup U'$ genau dann ein Untervektorraum von V ist, wenn $U \subset U'$ oder $U' \subset U$ gilt.