Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik SS 2008 – Blatt 03

Abgabetermin: Mittwoch 07.05.2008 um 08:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer deutlich auf Ihre Lösungen!

1. Bestimmen Sie jeweils eine Basis der folgenden Vektorräume:
   (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1 = x_2\}$.
   (b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0\}$.
   (c) $\{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}3)^3 \;:\; \bar{2}x + y = 0\}$.
   (d) $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;:\; f(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x\}$.

2. Bringen Sie die folgenden Matrizen über den gegebenen Körpern K jeweils in Zeilenstufenform:

$$K = \mathbb{R} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = \mathbb{R} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = \mathbb{C} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 0 & 1 & i \\ 1 & i & i \end{pmatrix}$$

$$K = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}3 \quad , \quad D = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

3. Bestimmen Sie jeweils eine Basis sowie die Dimension der folgenden Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \;,\; W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \;,\; \langle U \cup W \rangle \,.$$

4. Es sei V ein K-Vektorraum für den Körper $K = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$, und p eine beliebige Primzahl. Drücken Sie die Zahl $\#V$ der Vektoren von V durch die Dimension von V aus, und beweisen Sie Ihre Aussage ausführlich.