Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik SS 2008 – Blatt 04

Abgabetermin: Mittwoch 21.05.2008 um 08:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung
Für dieses Blatt haben Sie zwei Wochen Zeit, es gibt $5 \cdot 4 = 20$ Punkte für das Blatt.

Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer deutlich auf Ihre Lösungen!

1. Es sei $K = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ und $V = K^4$.

   (a) Berechnen Sie die Dimensionen der Untervektorräume

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\rangle , \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\rangle .$$

   (b) Bestimmen Sie die Dimension der Summe $U + W$.

   (c) Bestimmen Sie mit der Dimensionsformel die Dimension des Schnittes $U \cap W$.

   Die Verknüpfungstafeln für $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}3$ lauten

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

,

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

2. Der Vektorraum V sei endlich-dimensional mit Unterräumen $U_1, \ldots, U_r$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$

   (b) $\dim(V) = \dim(U_1) + \cdots + \dim(U_r)$ und $V = U_1 + \cdots + U_r$.

3. Im Folgenden ist K ein Körper und U, V jeweils K -Vektorräume. Entscheiden Sie, ob die gegebenen Abbildungen $U \to V$ linear sind:

   (a) $K = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}$. $F : U \to V$, $(x, y) \mapsto (1 + x + y)$.

   (b) $K = \mathbb{R}$, $U = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $V = \mathbb{R}$. $A : U \to V$, $f \mapsto f(c)$
   (Die Abbildung A ist die Auswertung an einer Stelle $c \in \mathbb{R}$).

   (c) $K = \mathbb{R}$, $U = K^3$, $V = K = K^1$. $P : U \to V$, $(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2)$.

   (d) $K = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$, $U = K^3$, $V = K = K^1$. $P : U \to V$, $(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2)$.

- **Bitte wenden** -

4. (a) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns der Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{R}) .$$

Hinweis: Die Matrix hat bereits Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns der linearen Abbildung

$$\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1 \quad , \quad \ell(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n .$$

Hinweis: Konstruieren Sie auf möglichst einfache Weise $n-1$ linear unabhängige Vektoren, die im Kern liegen. Zeigen Sie dann, dass Sie den ganzen Kern erzeugen.

5. Beweisen Sie Notiz 2.1.11 aus dem Skript für lineare Abbildungen $f : V \to W$:

(a) f ist genau dann injektiv, wenn das Bild jeder Basis von V unter f linear unabhängig ist.

(b) f ist genau dann surjektiv, wenn das Bild jeder Basis von V unter f den Raum W erzeugt.

(c) f ist genau dann bijektiv, wenn das Bild jeder Basis von V unter f eine Basis von W ist.