Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik SS 2008 – Blatt 05

Abgabetermin: Mittwoch 28.05.2008 um 08:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung.

Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer deutlich auf Ihre Lösungen!

1. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

   (a)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 3, \mathbb{R})$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{Z}/\mathbb{Z}5) \ , \ \ \mathbb{Z}/\mathbb{Z}5 \ = \ \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \ .$$

2. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen ${}^{\underline{v}}_{\underline{w}}M(f)$ über dem Körper K der gegebenen linearen Abbildungen $f : V \to W$ bzgl. der kanonischen Basen $\underline{v}$ von V bzw. $\underline{w}$ von W :

   (a) $K = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, 2x - y, x - y - 4z)$, mit den Basen
   $$\underline{v} \ = \ \underline{w} \ = \ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \ .$$

   (b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y)$, mit den Basen
   $$\underline{v} \ = \ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \ , \ \underline{w} \ = \ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \ .$$

   (c) $K = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{C}$, $f(z) = i \cdot z$, i die imaginäre Einheit, mit den Basen
   $$\underline{v} \ = \ \underline{w} \ = \ (1 \, , \, i) \ .$$

- Bitte wenden -

3. Es sei $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^4$. Entscheiden Sie (mit Beweis), ob es für die folgenden Vektorsysteme $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ bzw. $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt mit $f(v_j) = w_j$:

   (a)
$$\underline{v} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) , \underline{w} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) ,$$

   (b)
$$\underline{v} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) , \underline{w} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) .$$

4. Verwenden Sie die Lagrange-Interpolation 2.2.4 aus der Vorlesung, um ein Polynom $p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ möglichst kleinen Grades zu berechnen, das
$$p(0) = 1 \;\; , \;\; p(1) = 6 \;\; , \;\; p(-1) = 4 \;\; , \;\; p(2) = 31$$
   erfüllt.

Die Probeklausur findet am 30. Mai um 8:00 im Hörsaal H3 statt.
Sie wird wie ein Übungsblatt zu 32 Punkten gewertet.

In der Klausur sind <u>keine</u> Hilfsmittel (Taschenrechner, Blätter, etc.) erlaubt.