Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik SS 2008 – Blatt 06

Abgabetermin: Mittwoch 11.06.2008 um 08:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung.

Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer deutlich auf Ihre Lösungen!

1. Es seien $\mathrm{id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto x$ die identische Abbildung, und

$$\underline{u} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right) \quad , \quad \underline{e} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right)$$

Basen des $\mathbb{R}^3$ ($\underline{e}$ ist die kanonische Basis). Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen ${}^{\underline{u}}_{\underline{e}}M(\mathrm{id})$ sowie ${}^{\underline{e}}_{\underline{u}}M(\mathrm{id})$. Zeigen Sie dann (ohne Ausrechnung des Matrixprodukts), dass das Produkt der beiden Matrizen die Einheitsmatrix ist.

2. Es sei P_3 der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 3 mit der Basis $\underline{u} = (1, X, X^2, X^3)$.

   (a) Es sei $f : P_3 \to \mathbb{R}$, $p(X) \mapsto f(p(X)) = p(1)$ die lineare Abbildung aus der Probeklausur. Bestimmen Sie ${}^{\underline{u}}_{\underline{e}}M(f)$ für die kanonische Basis $\underline{e} = (1)$ des $\mathbb{R}^1$.

   (b) Es sei $g : P_3 \to P_3$, $p(X) \mapsto g(p(X)) = p(X+1)$ die lineare Abbildung aus der Probeklausur. Bestimmen Sie ${}^{\underline{u}}_{\underline{u}}M(g)$.

3. (a) Es sei die folgende lineare Abbildung gegeben:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad f(x,y) = (x+y, y) \, .$$

   Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}^{\underline{e}}_{\underline{e}}M(f)$ bzgl. der kanonischen Basis, und berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{Z}$ die n -te Potenz dieser Matrix. Eine negative Potenz A^{-n} ist definiert als die n -te Potenz der Inversen A^{-1} (die sie hier berechnen müssen).

   (b) Es sei die folgende lineare Abbildung gegeben:

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad g(x,y) = (y, -x) \, .$$

   Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}^{\underline{e}}_{\underline{e}}M(g)$ bzgl. der kanonischen Basis, und berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{Z}$ die n -te Potenz dieser Matrix.

4. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Eine *Projektion* von V ist ein Endomorphismus $f : V \to V$ mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie für solche f :

   (a) Bild und Kern von f geben die direkte Summe $V = \mathrm{Bi}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

   (b) Es gibt eine Basis $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V , so dass die Darstellungsmatrix von f die Form

$${}^{\underline{v}}_{\underline{v}}M(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

   besitzt, wobei auf der Hauptdiagonalen $r = \dim(\mathrm{Bi}(f))$ Einsen stehen.