Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik SS 2008 – Blatt 08

Abgabetermin: Mittwoch 25.06.2008 um 08:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung.

Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer deutlich auf Ihre Lösungen!

1. Es sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch $x \mapsto Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}(v_1)$ von $v_1 = (-2, -1, 0, 1)^T$.

   (b) Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}(v_2)$ von $v_1 = (-2, 1, 1, 0)^T$.

2. Berechnen Sie die Determinante der Matrizen von Blatt 7:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \; B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} , \; C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} .$$

3. Beweisen Sie mit Induktion nach n , dass für die Vandermonde-Determinante gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

4. Es seien $V = K^n$ und U, W zwei verschiedene Hyperebenen in V , d.h. U und W sind zwei verschiedene $(n-1)$ -dimensionale Untervektorräume von V . Gegeben seien ferner Basen $\underline{u} = u^1, \ldots, u^{n-1}$ von U bzw.
$\underline{w} = w^1, \ldots, w^{n-1}$ von W .

   (a) Zeigen Sie: Es existiert ein $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit
$$\det(w^j, u^1, \ldots, u^{n-1}) \neq 0.$$

   (b) Sei j wie in (a) gewählt. Zeigen Sie: Die $n-2$ Vektoren
$$w^k - \frac{\det(w^k, u^1, \ldots, u^{n-1})}{\det(w^j, u^1, \ldots, u^{n-1})} w^j \; , \; k \neq j,$$
bilden eine Basis von $U \cap W$.

   (c) Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap W$ mit Hilfe von (b), wobei $U, W \subset \mathbb{R}^4$ gegeben sind durch

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle , \; U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 26 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Die 2. Probeklausur findet am 4. Juli 08:15-10:00 im Hörsaal H3 statt