Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

Institut für Reine Mathematik SS 2008 – Blatt 10

Abgabetermin: Mittwoch 09.07.2008 um 08:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung.

Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer deutlich auf Ihre Lösungen!

1. Es sei
$$f(x) = Ax \; , \; A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} .$$
   (a) Bestimmen Sie das char. Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume von f .
   (b) Stellen Sie aus den Eigenvektoren eine Basis $\underline{u}$ des $\mathbb{R}^3$ zusammen.
   (c) Stellen Sie ein $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ auf, so dass $D = SAS^{-1}$ diagonal ist.

2. Es sei $f : K^3 \to K^3$ für $K = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}3$ gegeben durch
$$f(x) = Ax \; , \; A = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix} .$$
   (a) Bestimmen Sie das char. Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume von f .
   (b) Stellen Sie aus den Eigenvektoren eine Basis $\underline{u}$ des K^3 zusammen.
   (c) Stellen Sie ein $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Z}/\mathbb{Z}3)$ auf, so dass $D = SAS^{-1}$ diagonal ist.

   Hinweis: Überlegen Sie, welche Ergebnisse Sie aus Aufgabe 1 übernehmen können.

3. Es sei $A \in M(n \times n, K)$ diagonalisierbar mit Transformationsmatrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$, d. h. $D = SAS^{-1}$ ist diagonal. Zeigen Sie, dass auch die folgenden Matrizen durch S diagonalisiert werden:
   (a) Die Potenz A^k für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
   (b) Das Inverse A^{-1} falls A zusätzlich regulär ist.
   (c) Die Matrix $p(A)$ für jedes Polynom $p(X)$ über K .

4. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ diagonalisierbar. Wir untersuchen in dieser Aufgabe die geometrische Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \lim_{m \to \infty} \left(A^0 + A^1 + \cdots + A^m \right)$$
   über A . Dabei existiert der Limes einer Matrizenfolge, falls er komponentenweise im Sinne der Analysis existiert. Die Rolle des Betrags von A übernimmt hier der *Spektralradius*: $r = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ Eigenwert von } A\}$.

   Zeigen Sie:

   (a) Ist $r > 1$, so konvergiert die geometrische Reihe nicht.
   (b) Ist $r < 1$, so konvergiert die geometrische Reihe.
   (c) Im Fall (b) ist der Reihenwert das Inverse von $E - A$.

Dies ist das letzte Übungsblatt, für das Übungspunkte vergeben werden.