# Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

**Institut für Reine Mathematik** SS 2008 – Blatt 11

---

**- Keine Abgabe -**

---

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte mit algebraischen und geometrischen Vielfachheiten, die Eigenräume, sowie eine Diagonalisierung inklusive Transformationsmatrix für
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
über dem Körper $\mathbb{R}$ .

2. Es sei
$$C = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{4} \end{pmatrix}$$
die Matrix aus der 2. Probeklausur über dem Körper $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}5$ . Berechnen Sie ihr charakteristisches Polynom und sämtliche Eigenwerte mit Vielfachheiten. Was folgt für die Diagonalisierbarkeit von $A$ über $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}5$ ?

3. Diagonalisieren Sie, sofern möglich, die folgenden Matrizen:

   (a) Das $(n \times n)$ -Jordankästchen
   $$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & \lambda & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$
   über dem Körper $\mathbb{R}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ .

   (b) Die Drehmatrix
   $$D = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$
   über dem Körper $\mathbb{C}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ .

4. Es sei $V$ ein endlichdimensionaler $K$ -Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ .

   (a) Zeigen Sie: Ist jedes $v \neq 0$ aus $V$ ein Eigenvektor von $f$ , so gibt es $a \in K$ mit $f = a \cdot \mathrm{id}_V$ .

   (b) Der Endomorphismus $f$ habe nur einen Eigenwert $a \in K$ . Zeigen Sie: Genau dann besitzt $V$ eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von $f$ , wenn $f = a \cdot \mathrm{id}_V$ gilt.

   (c) Zeigen Sie: Ist $f$ eine Projektion (d. h. $f = f \circ f$ ), so sind $0$ und $1$ die einzigen Eigenwerte von $f$ .