Hauptklausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

Datum: 22. Juli 2008 Prüfer: Prof. Dr. Werner Lütkebohmert

Matrikelnummer: ____________________________

Vorname: ____________________________

Name: ____________________________

Studiengang: ____________________________

Maximale Punktzahl: 100 **Bearbeitungszeit: 120 Minuten**

Punkte Aufgabe 1	
Punkte Aufgabe 2	
Punkte Aufgabe 3	
Punkte Aufgabe 4	
Punkte Aufgabe 5	
Punkte Aufgabe 6	
Punkte Aufgabe 7	
Punkte Aufgabe 8	
Punkte Aufgabe 9	
Summe der Punkte	
Nach Klausureinsicht	
Klausurnote	

Am Übungsbetrieb erfolgreich teilgenommen	
Gesamtnote der Prüfung Lineare Algebra	

Hauptklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I 22. Juli 2008

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 1 8 Punkte

(a) Geben Sie die Definition der Summe von n Unterräumen $U_1, \ldots, U_n \subset V$.
(2 Punkte)

(b) Geben Sie die Definition der direkten Summe von n Unterräumen $U_1, \ldots, U_n \subset V$.
(2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie ein $v \in \mathbb{R}^4$, so dass die Summe

$$\mathbb{R}^4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + \langle v \rangle$$

direkt ist.
(4 Punkte)

Lösung

Hauptklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

22. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 2

10 Punkte

(a) Wie sind Kern und Bild einer linearen Abbildung $f: V \to W$ definiert?
(2 Punkte)

(b) Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, und $f \in \mathrm{End}(V)$.
Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\mathrm{Ker}(f \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

(ii) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Bi}(f) = \{0\}$.

(8 Punkte)

Lösung

Hauptklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

22. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 3 18 Punkte

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in M(m \times n, K)$.

(a) Geben Sie ein Kriterium dafür, dass $L(A; b)$ nicht leer ist.
(2 Punkte)

(b) Beschreiben Sie, wie man aus den Spalten von A möglichst einfach eine Basis des Spaltenraums von A auswählen kann.
(2 Punkte)

(c) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $K = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösungsmengen $L(A; 0)$ und $L(A; b)$.
(14 Punkte)

Lösung

Hauptklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

22. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 4

7 Punkte

(a) Geben Sie die Entwicklungsformeln von Laplace an.
(3 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}) .$$

(4 Punkte)

Lösung

Hauptklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

22. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 5   12 Punkte

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{\underline{v}}^{\underline{v}}M(f)$ für

$$\underline{v} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \ , \ f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ x & \mapsto & Ax \end{cases} \ , \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} .$$

Hinweis: Verwenden Sie die Transformationsformel.

Lösung

Hauptklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I 22. Juli 2008

Matrikelnummer: ____________

Aufgabe 6 8 Punkte

(a) Wie lautet der Satz von Cayley-Hamilton?
(2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der linearen Abbildung

$$g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \ , \ g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix} .$$

(6 Punkte)

Lösung

Hauptklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

22. Juli 2008

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 7 — 9 Punkte

Es sei $A \in M(n \times n, K)$ und λ ein Eigenwert von A.

(a) Definieren Sie die algebraische und geometrische Vielfachheit von λ bzgl. A.
(4 Punkte)

(b) Konstruieren Sie für gegebenes $\lambda \in \mathbb{R}$ ein $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, so dass λ Eigenwert von A ist, und die beiden Vielfachheiten voneinander verschieden und nicht Null sind (mit Beweis).
(5 Punkte)

Lösung

Hauptklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I 22. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 8 20 Punkte

(a) Nennen Sie ein Kriterium dafür, dass $A \in M(n \times n, K)$ diagonalisierbar ist.
(2 Punkte)

(b) Angenommen ein diagonalisierbares $A \in M(n \times n, K)$ besitzt nur die Eigenwerte 1 und -1, berechnen Sie den Vektor $y = A^{1000}x$ für allgemeines $x \in \mathbb{R}^n$
(2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie ein $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, so dass $SAS^{-1} = D$ diagonal ist.
(16 Punkte)

Lösung

Hauptklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

22. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 9

8 Punkte

Es sei $P_2 = \{p(X)$ Polynom über $\mathbb{R}$ vom Grad $\leq 2\}$ versehen mit der Basis $\underline{v} = (1, X, X^2)$. Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi : P_2 \to P_2 \ , \ \varphi(p) \ = \ p' + p$$

wobei $p'(X)$ die formale Ableitung von $p(X)$ ist.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}^{\underline{v}}_{\underline{v}}M(\varphi) \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$.
(6 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung φ bijektiv ist.
(2 Punkte)

Lösung