Nachklausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

Datum: 16. September 2008 Prüfer: Prof. Dr. Werner Lütkebohmert

Matrikelnummer: ____________________

Vorname: ____________________

Name: ____________________

Studiengang: ____________________

Maximale Punktzahl: 100 **Bearbeitungszeit: 120 Minuten**

Punkte Aufgabe 1	
Punkte Aufgabe 2	
Punkte Aufgabe 3	
Punkte Aufgabe 4	
Punkte Aufgabe 5	
Punkte Aufgabe 6	
Punkte Aufgabe 7	
Punkte Aufgabe 8	
Punkte Aufgabe 9	
Summe der Punkte	
Nach Klausureinsicht	
Klausurnote	

Am Übungsbetrieb erfolgreich teilgenommen	
Gesamtnote der Prüfung Lineare Algebra	

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 1

9 Punkte

(a) Geben Sie die Dimensionsformel an.
(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Dimensionen der Unterräume U, V, $U \cap V$ und $U + V$ des $\mathbb{R}^4$ für

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \ , \ V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

(7 Punkte)

Lösung

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 2

12 Punkte

Entscheiden Sie jeweils, ob es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, welche die gegebene Eigenschaft erfüllt. Geben Sie im Falle der Existenz die Darstellungsmatrix bzgl. der Standardbasis an, andernfalls erläutern Sie kurz warum es eine solche Abbildung nicht geben kann:
(jeweils 3 Punkte)

(a) $\mathrm{Bi(f)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x = 3y\}$.

(b) $\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(c) $f = f \circ f$ und $f(1, 0) = f(0, 1) \neq (0, 0)$.

(d) $f(x, y) = f(y, x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $f(1, 1) = 0$ aber $f \neq 0$.

Lösung

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 3 — 16 Punkte

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in M(m \times n, K)$.

(a) Beschreiben Sie die Struktur der Lösungsmengen $L(A;0)$ und $L(A;b)$.
(2 Punkte)

(b) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $K = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösungsmengen $L(A;0)$ und $L(A;b)$.
(14 Punkte)

Lösung

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 4 — 7 Punkte

(a) Nennen Sie die drei definierenden Eigenschaften der Determinantenabbildung $\det : M(n \times n, K) \to K$.
(3 Punkte)

(b) Beweisen Sie für $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ die Abschätzung $|\det(A)| \leq n! \cdot a^n$ für $a = \max(|a_{ij}|)$.
(4 Punkte)

Lösung

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I | 16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 5 | 7 Punkte

Bestimmen Sie die Werte $a \in \mathbb{R}$, für die

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R})$$

invertierbar ist.

Lösung

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 6

14 Punkte

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}) .$$

Lösung

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 7

19 Punkte

(a) Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten. Beschreiben Sie, wie die Diagonalisierung von A vorgenommen wird.
(3 Punkte)

(b) Zeigen Sie: Gilt $A^k = 0$ aber $A \neq 0$ für ein $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, so ist A nicht diagonalisierbar.
(4 Punkte)

(c) Konstruieren Sie eine Matrix $A \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$ mit den folgenden Eigenschaften:
- A hat den Eigenwert 0 zum Eigenraum $\langle (1,1,0,0)^t, (1,0,1,1)^t \rangle$.
- A hat den Eigenwert 1 zum Eigenraum $\langle (1,1,1,1)^t \rangle$.
- A hat den Eigenwert 2 zum Eigenraum $\langle (1,0,0,1)^t \rangle$.

(12 Punkte)

Hinweis: Diese Aufgabenteile können unabhängig voneinander gelöst werden.

Lösung

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 8

8 Punkte

Gegeben sei der Vektorraum P_2 der Polynome vom Grad höchstens 2 über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, und die lineare Abbildung

$$\alpha : P_2 \to \mathbb{R}^3 \ , \ \alpha(p) = (p(-1), p(0), p(1))$$

die ein Polynom $p \in P_2$ an den Stellen $-1, 0, 1$ auswertet.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}^{\underline{v}}_{\underline{e}}M(\alpha) \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ bzgl. der Basis $\underline{v} = (1, X, X^2)$ von P_2 und der Standardbasis $\underline{e}$ des $\mathbb{R}^3$.
(4 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass α ein Isomorphismus ist.
(4 Punkte)

<u>Lösung</u>

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 9 — 8 Punkte

Es sei $f : V \to V$ linear mit $f \circ f = 0$ und $\dim(V) = n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es ist $\mathrm{rg}(f) \leq \frac{1}{2}n$.
(3 Punkte)

(b) f hat höchstens $1 + \frac{1}{2}n$ paarweise verschiedene Eigenwerte.
(5 Punkte)

Lösung