Nachklausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

Datum: 16. September 2008 Prüfer: Prof. Dr. Werner Lütkebohmert

Matrikelnummer: ____________________

Vorname: ____________________

Name: ____________________

Studiengang: ____________________

Maximale Punktzahl: 100 **Bearbeitungszeit: 120 Minuten**

Punkte Aufgabe 1	
Punkte Aufgabe 2	
Punkte Aufgabe 3	
Punkte Aufgabe 4	
Punkte Aufgabe 5	
Punkte Aufgabe 6	
Punkte Aufgabe 7	
Punkte Aufgabe 8	
Punkte Aufgabe 9	
Summe der Punkte	
Nach Klausureinsicht	
Klausurnote	

Am Übungsbetrieb erfolgreich teilgenommen	
Gesamtnote der Prüfung Lineare Algebra	

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I 16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 1 9 Punkte

(a) Geben Sie die Dimensionsformel an.
(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Dimensionen der Unterräume U, V, $U \cap V$ und $U + V$ des $\mathbb{R}^4$ für

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle , \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

(7 Punkte)

Lösung

Die Dimensionsformel lautet $\dim(U) + \dim(V) = \dim(U \cap V) + \dim(U + V)$ für Unterräume U, V eines endlichdimensionalen Vektorraums.

Der Unterraum V hat die Dimension 2, da die beiden Erzeuger linear unabhängig sind (sie befinden sich bereits in Zeilenstufenform). Zur Berechnung der Dimension von U schreiben wir die drei Erzeuger als Zeilen in eine Matrix und bringen sie auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I}-2\,\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I}+5\,\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{P}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Damit besitzt U die Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und hat die Dimension 2.

Die Unterraumsumme $U + V$ wird von der Vereinigung der Basen von U und V erzeugt, also schreiben wir die vier Erzeuger als Zeilen in eine Matrix und bringen sie auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IV}-\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IV}+2\,\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IV}-\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

woraus $\dim(U + V) = 3$ folgt. Mit der Dimensionsformel erhält man dann $\dim(U \cap V) = 1$.

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 2

12 Punkte

Entscheiden Sie jeweils, ob es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, welche die gegebene Eigenschaft erfüllt. Geben Sie im Falle der Existenz die Darstellungsmatrix bzgl. der Standardbasis an, andernfalls erläutern Sie kurz warum es eine solche Abbildung nicht geben kann:
(jeweils 3 Punkte)

(a) $\mathrm{Bi(f)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 2x = 3y\}$.

(b) $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(c) $f = f \circ f$ und $f(1,0) = f(0,1) \neq (0,0)$.

(d) $f(x,y) = f(y,x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $f(1,1) = 0$ aber $f \neq 0$.

Lösung

Teil a): Wir nehmen die Standardbasis $\underline{e} = ((1,0),(0,1))$ des $\mathbb{R}^2$, durch lineare Fortsetzung ist die Abbildung f dann eindeutig durch die Bilder der Basisvektoren festgelegt, also $f(1,0) = (a,c)$ und $f(0,1) = (b,d)$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dabei sollen die Bilder die Gleichung $2x = 3y$ erfüllen, eine mögliche Wahl dafür ist $a = 3, c = 2$ sowie $b = 0$ und $d = 0$, dann ist $2a = 3c$ und gleichzeitig $2b = 3d$. Die Darstellungsmatrix dieser Abbildung ist

$$ {}^{\underline{e}}_{\underline{e}}M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} . $$

Teil b): Eine solche Abbildung gibt es nicht, denn der Kern einer linearen Abbildung ist immer ein Untervektorraum, aber die Kreisscheibe $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1\}$ verletzt die Vektorraumaxiome wegen $(1,0),(0,1) \in K$ und $(1,0) + (0,1) \notin K$.

Teil c): So ein f existiert, beispielsweise kann man wieder zur Standardbasis $\underline{e}$ die Bilder vorgeben, nun mit der Einschränkung, dass $f(1,0) = f(0,1) = (a,c)$ sein soll. Andererseits ist $f = f \circ f$ gefragt, d. h. auch $f(f(1,0)) = f(f(0,1)) = (a,c)$. Das Problem kann man ganz einfach lösen indem man $(a,c) = (1,0)$ nimmt, d. h. der erste Basisvektor geht auf sich selbt. Die zugehörige Darstellungsmatrix ist dann

$$ {}^{\underline{e}}_{\underline{e}}M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . $$

Das dann tatsächlich $f \circ f = f$ gilt sieht man daran, dass

$$ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . $$

ist.

Teil d): So eine Abbildung gibt es nicht, denn angenommen $f(1,0) = (a,c)$ und $f(0,1) = (b,d)$, dann folgt aus $f(x,y) = f(y,x)$ zunächst $a = b$ und $b = d$, aus $f(1,1) = 0$ dann aber auch $(2a, 2c) = f(1,0) + f(0,1) = f(1,1) = (0,0)$, also $a = b = c = d = 0$, womit f die Nullabbildung wäre, was ausgeschlossen war.

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I 16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 3 16 Punkte

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in M(m \times n, K)$.

(a) Beschreiben Sie die Struktur der Lösungsmengen $L(A;0)$ und $L(A;b)$.
(2 Punkte)

(b) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $K = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösungsmengen $L(A;0)$ und $L(A;b)$.
(14 Punkte)

Lösung

Zu a): Die Lösungsmenge $L(A;0)$ des homogenen Gleichungssystems ist ein Untervektorraum des K^n, die Lösungsmenge $L(A;b)$ des inhomogenen Systems ist von der Form $L(A;b) = x_0 + L(A;0)$, also der homogene Lösungsraum verschoben um eine spezielle Lösung $x_0 \in K^n$.

Zu b): Wir bilden zuerst die Zeilenstufenform der erweiterten Matrix (A, b):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & \mathbf{-1} \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -3 & \mathbf{0} \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 4 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & \mathbf{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II+III}]{\text{IV}\cdot\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & \mathbf{-1} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{2} \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 4 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{II}-\text{IV}]{\text{I+IV}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 4 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{P}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 4 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten die Stufen $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ und $j_3 = 4$. Der Rang der erweiterten Matrix stimmt mit dem Rang der Matrix überein (gemeinsame Nullzeile unten) und ist 3. Die Nicht-Stufen liegen bei $j = 3, 5$. Damit besitzt $L(A;0)$ zwei Erzeuger. Wir lesen die Erzeuger ab:

Erzeuger v_1 zu Nicht-Stufe $j = 5$:
Ansatz $v_1 = (\cdot, \cdot, 0, \lambda, 1)^t$. Einsetzen in Zeile III ergibt $\lambda = -1$.
Ansatz $v_1 = (\cdot, \lambda, 0, -1, 1)^t$. Einsetzen in Zeile II ergibt $\lambda = 0$.
Ansatz $v_1 = (\lambda, 0, 0, -1, 1)^t$. Einsetzen in Zeile I ergibt $\lambda = 0$.

Der erste Erzeuger ist

$$v_1 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Erzeuger v_2 zu Nicht-Stufe $j = 3$:
Ansatz $v_2 = (\cdot, \lambda, 1, 0, 0)^t$. Einsetzen in Zeile II ergibt $\lambda = -1$.
Ansatz $v_2 = (\lambda, -1, 1, 0, 0)^t$. Einsetzen in Zeile I ergibt $\lambda = 0$.
Der zweite Erzeuger ist

$$v_2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Damit ist $L(A; 0) = \langle\, v_1, v_2 \,\rangle$.

Spezielle Lösung x_0 zu Nicht-Stufe $j = 5$:
Ansatz $x_0 = (\cdot, \cdot, 0, \lambda, 1)^t$. Einsetzen in Zeile III ergibt $\lambda = 0$.
Ansatz $x_0 = (\cdot, \lambda, 0, 0, 1)^t$. Einsetzen in Zeile II ergibt $\lambda = 2$.
Ansatz $x_0 = (\lambda, 2, 0, 0, 1)^t$. Einsetzen in Zeile I ergibt $\lambda = 1$.
Eine spezielle Lösung ist also

$$x_0 \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Diese Lösung kann man auch sofort daran ablesen, dass der Zielvektor b mit der letzten Spalte der Zeilenstufenform übereinstimmt. Die Lösungsmenge des Gesamtsystems ist also

$$L(A; b) \;=\; x_0 + L(A; 0) \;=\; x_0 + \langle\, v_1, v_2 \,\rangle \;.$$

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 4 — 7 Punkte

(a) Nennen Sie die drei definierenden Eigenschaften der Determinantenabbildung $\det : M(n \times n, K) \to K$. (3 Punkte)

(b) Beweisen Sie für $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ die Abschätzung $|\det(A)| \le n! \cdot a^n$ für $a = \max(|a_{ij}|)$. (4 Punkte)

Lösung

Zu a): Die Determinante ist linear in jeder Zeile (man sagt auch, sie ist multilinear), sie ist alternierend, und normiert.

Zu b): Abschätzen der Leibnizformel

$$\det(A) \;=\; \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)}$$

ergibt wegen der Dreiecksungleichung

$$|\det(A)| \;=\; \left| \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)} \right| \;\le\; \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |\operatorname{sgn}(\sigma)| \cdot \prod_{j=1}^{n} |a_{j,\sigma(j)}| \;\le\; \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} 1 \cdot \prod_{j=1}^{n} a \;\le\; n! \cdot a^n$$

da die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ genau $n!$ Elemente hat.

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I — 16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 5 — 7 Punkte

Bestimmen Sie die Werte $a \in \mathbb{R}$, für die

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R})$$

invertierbar ist.

Lösung

Berechnung der Determinanten von A ergibt

$$\det \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix} \underset{\substack{(2)-(1) \\ \vdots \\ (n)-(1)}}{\overset{\text{Zeilen}}{=}} \det \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-a & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{(1)+(2) \\ \vdots \\ (1)+(n)}}{\overset{\text{Spalten}}{=}} \det \begin{pmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{pmatrix} .$$

Da die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix das Produkt der Diagonalelemente ist, folgt

$$\det(A) = (a+n-1)(a-1)^{n-1} .$$

Die Determinante ist genau dann Null, wenn $a = 1-n$ oder $a = 1$ ist, also ist A invertierbar für $a \neq 1, 1-n$.

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 6 14 Punkte

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}) .$$

<u>Lösung</u>

Zuerst bestimmen wir das charakteristische Polynom von A:

$$c(A,\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} \underset{\text{Zeile I}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Zeile II}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (1-\lambda)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot ((-1-\lambda)(5-\lambda)+8) = (1-\lambda)^2 \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 3) .$$

Das quadratische Teilpolynom hat offenbar die Nullstellen $\lambda = 1, 3$, also ist

$$c(A,\lambda) = (\lambda-1)^3 \cdot (\lambda - 3)$$

und A hat die Eigenwerte 1 und 3, und zwar mit algebraischen Vielfachheiten $\mu(c,1) = 3$ und $\mu(c,3) = 1$.

<u>Eigenraum $E(A,3)$:</u>
Das ist der Kern von $A - 3E_4$, und wir erhalten mit dem LGS-Verfahren

$$A - 3E_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-2\,\text{IV}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{P}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Hier kann man den Erzeuger $\vec{v} = (0,1,0,1)^t$ direkt ablesen. Wegen $\mu(c,3) = 1$ wissen wir, dass $\dim(\mathrm{Ker}(A - 3E_4)) = 1$ ist, also reicht dieser Erzeuger schon: $E(A,4) = \langle\, v \,\rangle$.

<u>Eigenraum $E(A,1)$:</u>
Das ist der Kern von $A - E_4$, und wir erhalten mit dem LGS-Verfahren

$$A - 3E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}-\text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{P}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ablesen ergibt die Erzeuger $\vec{w}_1 = (0,2,0,1)^t$, $\vec{w}_2 = (0,0,1,0)^t$ und $w_3 = (1,0,0,0)^t$. Damit ist $E(A,1) = \langle\, w_1, w_2, w_3 \,\rangle$.

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I 16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 7 19 Punkte

(a) Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten. Beschreiben Sie, wie die Diagonalisierung von A vorgenommen wird.
(3 Punkte)

(b) Zeigen Sie: Gilt $A^k = 0$ aber $A \neq 0$ für ein $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, so ist A nicht diagonalisierbar.
(4 Punkte)

(c) Konstruieren Sie eine Matrix $A \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$ mit den folgenden Eigenschaften:
- A hat den Eigenwert 0 zum Eigenraum $\langle (1,1,0,0)^t, (1,0,1,1)^t \rangle$.
- A hat den Eigenwert 1 zum Eigenraum $\langle (1,1,1,1)^t \rangle$.
- A hat den Eigenwert 2 zum Eigenraum $\langle (1,0,0,1)^t \rangle$.

(12 Punkte)

Hinweis: Diese Aufgabenteile können unabhängig voneinander gelöst werden.

Lösung

Zu a): Sind die Eigenwerte paarweise verschieden, so ist die Matrix nach Korollar 6.2.13 stets diagonalisierbar. Jeder Eigenraum hat dann die Dimension Eins (weil die algebraische Vielfachheit schon Eins ist), dann wählt man zu jedem Eigenwert λ_j einen Erzeuger v_j von $E(A, \lambda_j)$. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte (in einer beliebigen Reihenfolge), dann ist die Diagonalisierung von A gegeben durch

$$SAS^{-1} = D \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \; S^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}, \; S = \text{Inverses von } S^{-1}.$$

Zu b): Wir zeigen, dass $A^k = 0$ für A diagonalisierbar nur für $A = 0$ möglich ist. Also angenommen A ist diagonalisierbar, d. h.

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

für ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und irgendwelche $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann ist umgekehrt $A = S^{-1}DS$, und damit

$$0 = A^k = (S^{-1}DS)^k = S^{-1}D^kS,$$

also $S^{-1} \cdot D^k \cdot S = 0$. Multipliziert man diese Gleichung von links mit S und von rechts mit S^{-1}, so erhält man $D^k = S \cdot 0 \cdot S^{-1}$. Daraus folgt

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = 0,$$

also $\lambda_1^k = \cdots = \lambda_n^k = 0$, was wegen $\lambda_j \in \mathbb{R}$ nur für $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ möglich ist. Daraus folgt $D = 0$, also ist auch $A = S^{-1}DS = 0$, und A war die Nullmatrix.

Zu c): Diesen Aufgabenteil löst man, indem man das Diagonalisierungsverfahren (wie es beispielsweise in der

Aufgabe 8 der Hauptklausur durchgeführt wurde) rückwärts anwendet. Die vorgeschriebenen Eigenwerte trägt man die Diagonalmatrix D ein:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

wobei der Eigenwert 0 zweimal auftreten muss wenn sein Eigenraum zweidimensional ist (Algebraische Vielfachheit ist mindestens die geometrische Vielfachheit, und größer kann sie nicht sein da die Summe aller Vielfachheiten die Dimension 4 der Matrix nicht überschreiten kann). Dann ist $D = SAS^{-1}$ die Diagonalisierung der (zu konstruierenden) Matrix A, wobei in S^{-1} die Erzeuger der Eigenräume stehen. Einsetzen der vorgegebenen Eigenvektoren aus der Aufgabenstellung ergibt

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ihr Inverses erhält man mit dem Invertierungsverfahren:

$$S = (S^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Damit ist

$$A = S^{-1} \cdot D \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit den gewünschten Eigenschaften.

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 8

8 Punkte

Gegeben sei der Vektorraum P_2 der Polynome vom Grad höchstens 2 über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, und die lineare Abbildung

$$\alpha : \ P_2 \to \mathbb{R}^3 \ \ , \ \ \alpha(p) \ = \ (p(-1), p(0), p(1))$$

die ein Polynom $p \in P_2$ an den Stellen $-1, 0, 1$ auswertet.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}^{\underline{v}}_{\underline{e}}M(\alpha) \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ bzgl. der Basis $\underline{v} = (1, X, X^2)$ von P_2 und der Standardbasis $\underline{e}$ des $\mathbb{R}^3$.
(4 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass α ein Isomorphismus ist.
(4 Punkte)

Lösung

Zu a): Wir setzen die Basisvektoren ein und erhalten

$$\alpha(1) = (1, 1, 1) \ \ , \ \ \alpha(X) = (-1, 0, 1) \ \ , \ \ \alpha(X^2) = (1, 0, 1) \, .$$

Da die Zielbasis die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ ist, folgt

$${}^{\underline{v}}_{\underline{e}}M(\alpha) \ = \ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \, .$$

Zu b): Die Aussage ist gleichbedeutend damit, dass $\det(M) \neq 0$ ist, denn dann hat M (und damit α) ein Inverses. Berechnung der Determinanten ergibt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{Zeile II}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ = \ (-1) \cdot (-1 - 1) \ = \ 2 \, .$$

Damit ist $\det(M) \neq 0$, die Darstellungsmatrix ist invertierbar, und die Inverse von α ist bestimmt durch die Darstellungsmatrix

$${}^{\underline{e}}_{\underline{v}}(\alpha^{-1}) \ = \ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \, .$$

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I 16. September 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 9 8 Punkte

Es sei $f : V \to V$ linear mit $f \circ f = 0$ und $\dim(V) = n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es ist $\operatorname{rg}(f) \leq \frac{1}{2}n$.
(3 Punkte)

(b) f hat höchstens $1 + \frac{1}{2}n$ paarweise verschiedene Eigenwerte.
(5 Punkte)

Lösung

Zu a): Die Aussage $f \circ f = 0$ bedeutet, dass $f(f(v)) = 0$ ist für alle $v \in V$, insbesondere ist $f(w) = 0$ für alle w aus dem Bild von f, oder anders ausgedrückt: das Bild von f ist eine Teilmenge des Kerns von f, also $\operatorname{Bi}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$. Damit ist auch $\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Bi}(f)) \leq \dim(\operatorname{Ker}(f))$. Aus der Rangformel folgt dann

$$n \;=\; \operatorname{rg}(f) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) \;\geq\; 2 \cdot \operatorname{rg}(f)$$

oder gleichbedeutend $\operatorname{rg}(f) \leq \frac{1}{2}n$.

Zu b): Aus $\operatorname{rg}(f) \leq \frac{1}{2}n$ folgt mit der Rangformel $\dim(\operatorname{Ker}(f)) \geq \frac{1}{2}n$, also hat f den Eigenwert Null mit geometrischer Vielfachheit mindestens $\frac{1}{2}n$. Jeder andere Eigenwert hat mindestens die geometrische Vielfachheit Eins, also ist die Summe der geometrischen Vielfachheiten mindestens $\frac{1}{2}n + m$ wenn m die Anzahl der paarweise verschiedenen Eigenwerte $\neq 0$ ist. Nun muss aber $\frac{1}{2}n + m \leq n$ gelten, da die Eigenräume zusammen keinen Raum erzeugen können, dessen Dimension über n liegt. Daraus folgt $m \leq \frac{1}{2}n$ für die Anzahl der von Null verschiedenen Eigenwerte, damit ist $\frac{1}{2}n + 1$ die maximale Anzahl paarweise verschiedener Eigenwerte überhaupt.