Lineare Algebra I

- Testklausur -

Sommersemester 2008

Matrikelnummer: ____________________

Vorname: ____________________

Name: ____________________

Studiengang: ____________________

Punkte Aufgabe 1	
Punkte Aufgabe 2	
Punkte Aufgabe 3	
Punkte Aufgabe 4	
Punkte Aufgabe 5	
Punkte Aufgabe 6	
Punkte Aufgabe 7	
Punkte Aufgabe 8	
Punkte Aufgabe 9	
Punkte Aufgabe 10	
Summe der Punkte	

Es sind maximal 32 Punkte zu erreichen. Die erreichten Punkte zählen als Übungspunkte.

Bearbeitungszeit: 100 Minuten.

Lineare Algebra I

- Testklausur - 30. Mai 2008

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 1 2 Punkte

(a) Wie ist der Begriff linear unabhängig definiert?

(b) Geben Sie ein Beispiel von 4 Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 im $\mathbb{R}^3$, so dass jeweils 3 Vektoren linear unabhängig sind.

Lösung

Lineare Algebra I

- Testklausur - 30. Mai 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 2 3 Punkte

(a) Wie ist die Dimension eines Vektorraums definiert?

(b) Zeigen Sie: Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und U ein Untervektorraum von V mit $\dim(U) = \dim(V)$, so gilt $U = V$.

Lösung

Lineare Algebra I

- Testklausur - 30. Mai 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 3 3 Punkte

(a) Wie lautet der Basisergänzungssatz?

(b) Ergänzen Sie die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu einer Basis $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ des $\mathbb{R}^5$.

Lösung

Lineare Algebra I

- Testklausur - 30. Mai 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 4 3 Punkte

(a) Was besagt der Basisauswahlsatz?

(b) Es seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig, und $v = \sum_{k=1}^{n} v_k$ sowie $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ fest gewählt. Unter welchen Bedingungen ist das System (v, v_i, v_j) linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Behauptung.

Lösung

Lineare Algebra I

- Testklausur - 30. Mai 2008

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 5 5 Punkte

(a) Wie lautet die Dimensionsformel?

(b) Gegeben seien die folgenden Unterräume des $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle, \quad V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle.$$

Bestimmen Sie jeweils die Dimensionen $\dim(U)$, $\dim(V)$, $\dim(U \cap V)$, $\dim(U + V)$.

Lösung

Lineare Algebra I

- Testklausur - 30. Mai 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 6 3 Punkte

Konstruieren Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ in der Form $f(x) = Ax$ mit $A \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle , \quad \mathrm{Bi}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Lösung

Lineare Algebra I

- Testklausur - 30. Mai 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 7 5 Punkte

Für $m \geq 0$ sei P_m der Vektorraum der Polynom über $\mathbb{R}$ vom Grad $\leq m$. Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Bestimmen Sie im Falle der Linearität Kern, Bild und Rang der Abbildungen:

(a) $F_1 : P_m \to \mathbb{R}$, $p(X) \mapsto p(1)$.

(b) $F_2 : P_m \to P_{m+1}$, $p(X) \mapsto Xp(X) + 1$.

(c) $F_3 : P_m \to P_m$, $p(X) \mapsto p(X - 1)$.

Dabei ist X eine Unbestimmte.

Lösung

Lineare Algebra I

- Testklausur - 30. Mai 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 8 2 Punkte

Es seien $v_1, \dots, v_n$ Vektoren aus einem Vektorraum V. Es gebe eine lineare Abbildung $f : V \to K^n$ mit $f(v_i) = e_i$, wobei $(e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis des K^n ist.

Zeigen Sie, dass das System $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig ist.

Lösung

Lineare Algebra I

- Testklausur - 30. Mai 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 9 **3 Punkte**

Es sei $f : K^n \to K^n$ eine lineare Abbildung. Es gelte $\sum_{i=1}^{j} e_i \in \mathrm{Bi}(f)$ für alle $j = 1, \ldots, n$, wobei $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis des K^n ist.

Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

Lösung

Lineare Algebra I

- Testklausur - 30. Mai 2008

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 10 3 Punkte

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $f(e_i) = e_1 + i \cdot e_i$ für $i = 1, 2, 3$, wobei (e_1, e_2, e_3) die kanonische Basis des K^3 ist. Stellen Sie die zu f assoziierte Matrix ${}^{\underline{e}}_{\underline{e}}M(f)$ auf.

Lösung