# Lineare Algebra I

# - Testklausur II -

Sommersemester 2008

Matrikelnummer: ____________________

Vorname: ____________________

Name: ____________________

Studiengang: ____________________

| | |
|---|---|
| Punkte Aufgabe 1 | |
| Punkte Aufgabe 2 | |
| Punkte Aufgabe 3 | |
| Punkte Aufgabe 4 | |
| Punkte Aufgabe 5 | |
| Punkte Aufgabe 6 | |
| Punkte Aufgabe 7 | |
| Punkte Aufgabe 8 | |
| Punkte Aufgabe 9 | |
| Summe der Punkte | |

Es sind maximal 32 Punkte zu erreichen. Die erreichten Punkte zählen als Übungspunkte.

**Bearbeitungszeit: 100 Minuten.**

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

# Aufgabe 1 4 Punkte

(a) Wie ist die Darstellungsmatrix ${}^{\underline{v}}_{\underline{w}}M(f)$ einer linearen Abbildung $f : V \to W$ definiert?

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}^{\underline{v}}_{\underline{v}}M(f)$ für $U = V = \mathbb{R}^3$ und

$$\underline{v} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) , \quad f(x, y, z) = (2z, 2x, 2y - 2x) .$$

**Lösung**

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

# Aufgabe 2 2 Punkte

(a) Es seien $\underline{v}, \underline{w}$ Basen eines endlichdimensionalen Vektorraums $V$ und $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ .
Drücken Sie ${}^{\underline{w}}_{\underline{w}}M(f)$ durch ${}^{\underline{v}}_{\underline{v}}M(f)$ aus.

(b) Zeigen Sie: Ist $\underline{w} = \lambda \cdot \underline{v}$ für ein Skalar $\lambda \neq 0$ , so stimmt ${}^{\underline{v}}_{\underline{v}}M(f)$ mit ${}^{\underline{w}}_{\underline{w}}M(f)$ überein.

**Lösung**

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

# Aufgabe 3 3 Punkte

Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{4} \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Z}/\mathbb{Z}5) .$$

Die Multiplikationstabelle für den Körper $K = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}5$ ist

| $\cdot$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

**Lösung**

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

# Aufgabe 4 8 Punkte

Geben seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 5, \mathbb{R}) \text{ und } b = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 .$$

(a) Berechnen Sie die Dimension $\dim(L(A;0))$ .

(b) Geben Sie eine Basis von $L(A;0)$ an.

(c) Geben Sie eine Lösung von $Ax = b$ an.

(d) Geben Sie die allgemeine Lösung von $Ax = b$ an.

(e) Geben Sie eine Basis des Spaltenraums von $A$ an, bestehend aus Spalten von $A$, und die Darstellung der übrigen Spalten von $A$ in der ausgewählten Basis.

(f) Geben Sie einen Vektor $c \in \mathbb{R}^4$ an, so dass $Ax = c$ keine Lösung besitzt.

**Lösung**

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

# Aufgabe 5 2 Punkte

(a) Geben Sie die Leibniz-Darstellung der Determinante $\det : M(n \times n, K) \to K$ an.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Leibniz-Darstellung: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für $\lambda \in K$ .

**Lösung**

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

# Aufgabe 6 3 Punkte

Berechnen Sie für gerades $n \geq 2$ die Determinante von

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R}) .$$

**Lösung**

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

# Aufgabe 7 3 Punkte

(a) Was ist ein Eigenwert eines Endomorphismus $f : V \to V$ ( $V$ endlichdimensional)?

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte des Endomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x, y, z) = (x, y + 2x, z + y + x) .$$

**Lösung**

Matrikelnummer: ___________

# Aufgabe 8 4 Punkte

Es sei $p(X)$ ein Polynom über $K$. Zeigen Sie: Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $A \in M(n \times n, K)$, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert der Matrix $p(A)$.

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für Monome $p(X) = X^n$.

**Lösung**

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

# Aufgabe 9 3 Punkte

Es sei $A \in M(n \times n, K)$ . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Es gilt $\det(A) = 0$ .

(2) Es gibt $0 \neq B \in M(n \times n, K)$ mit $A \cdot B = 0$ .

(3) Es gibt $0 \neq C \in M(n \times n, K)$ mit $C \cdot A = 0$ .

**Lösung**