Lineare Algebra I

- Testklausur II -

Sommersemester 2008

Matrikelnummer: ______________________________

Vorname: ______________________________

Name: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Punkte Aufgabe 1	
Punkte Aufgabe 2	
Punkte Aufgabe 3	
Punkte Aufgabe 4	
Punkte Aufgabe 5	
Punkte Aufgabe 6	
Punkte Aufgabe 7	
Punkte Aufgabe 8	
Punkte Aufgabe 9	
Summe der Punkte	

Es sind maximal 32 Punkte zu erreichen. Die erreichten Punkte zählen als Übungspunkte.

Bearbeitungszeit: 100 Minuten.

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 1 4 Punkte

(a) Wie ist die Darstellungsmatrix ${}^{\underline{v}}_{\underline{w}}M(f)$ einer linearen Abbildung $f: V \to W$ definiert?

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}^{\underline{v}}_{\underline{v}}M(f)$ für $U = V = \mathbb{R}^3$ und

$$\underline{v} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad , \quad f(x,y,z) = (2z, 2x, 2y - 2x) \, .$$

Lösung

(a) Die Darstellungsmatrix ${}^{\underline{v}}_{\underline{w}}M(f) = (\alpha_{ij})$ einer linearen Abbildung $f: V \to W$ enthält die Koeffizienten der Linearkombinationen der $f(v_j)$ bzgl. der Basis $\underline{w}$. Genauer ist

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w_i$$

für $j = 1 \dots m$ mit $\dim(V) = m$ und $\dim(W) = n$ und ${}^{\underline{v}}_{\underline{w}}M(f) \in M(n \times m, K)$.

(b) Die Bildvektoren sind

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \, .$$

Ihre Darstellungen über der Basis $\underline{w} = \underline{v}$ sind

$$f(v_1) = v_1 - v_2 + v_3 \quad , \quad f(v_2) = 3v_1 - v_2 - v_3 \quad , \quad f(v_3) = 2v_2 \, .$$

Eintragen der Darstellungskoeffizienten ergibt

$${}^{\underline{v}}_{\underline{v}}M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \, .$$

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 2 2 Punkte

(a) Es seien $\underline{v}, \underline{w}$ Basen eines endlichdimensionalen Vektorraums V und $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$. Drücken Sie ${}^{\underline{w}}_{\underline{w}}M(f)$ durch ${}^{\underline{v}}_{\underline{v}}M(f)$ aus.

(b) Zeigen Sie: Ist $\underline{w} = \lambda \cdot \underline{v}$ für ein Skalar $\lambda \neq 0$, so stimmt ${}^{\underline{v}}_{\underline{v}}M(f)$ mit ${}^{\underline{w}}_{\underline{w}}M(f)$ überein.

Lösung

Zu a): Die Transformationsformel aus der Vorlesung lautet

$$ {}^{\underline{w}}_{\underline{w}}M(f) \;=\; {}^{\underline{v}}_{\underline{w}}M(\mathrm{id}) \cdot {}^{\underline{v}}_{\underline{v}}M(f) \cdot {}^{\underline{w}}_{\underline{v}}M(\mathrm{id})\,. $$

Zu b): Nach der Transformationsformel ist

$$ {}^{\underline{w}}_{\underline{w}}M(f) \;=\; {}^{\underline{v}}_{\underline{w}}M(\mathrm{id}) \cdot {}^{\underline{v}}_{\underline{v}}M(f) \cdot {}^{\underline{w}}_{\underline{v}}M(\mathrm{id}) \;=\; \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \cdot {}^{\underline{v}}_{\underline{v}}M(f) \cdot \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} $$

$$ = \frac{1}{\lambda} \cdot {}^{\underline{v}}_{\underline{v}}M(f) \cdot \lambda \;=\; {}^{\underline{v}}_{\underline{v}}M(f)\,. $$

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 3 3 Punkte

Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{4} \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Z}/\mathbb{Z}5)\,.$$

Die Multiplikationstabelle für den Körper $K = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}5$ ist

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Lösung

Das Invertierungsverfahren ergibt

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{2} \end{pmatrix}\,.$$

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 4 8 Punkte

Geben seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 5, \mathbb{R}) \text{ und } b = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 .$$

(a) Berechnen Sie die Dimension $\dim(L(A;0))$.

(b) Geben Sie eine Basis von $L(A;0)$ an.

(c) Geben Sie eine Lösung von $Ax = b$ an.

(d) Geben Sie die allgemeine Lösung von $Ax = b$ an.

(e) Geben Sie eine Basis des Spaltenraums von A an, bestehend aus Spalten von A , und die Darstellung der übrigen Spalten von A in der ausgewählten Basis.

(f) Geben Sie einen Vektor $c \in \mathbb{R}^4$ an, so dass $Ax = c$ keine Lösung besitzt.

Lösung

Wir bestimmen eine Zeilenstufenform von der erweiterten Matrix (A, b) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & \mathbf{6} \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & \mathbf{1} \\ -1 & 2 & 1 & -2 & -1 & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{6} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}-\text{IV}]{\text{III}+\text{IV}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & \mathbf{6} \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & \mathbf{-5} \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & \mathbf{7} \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{III}+3\text{II}]{\text{I}+2\text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & \mathbf{-4} \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & \mathbf{-5} \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & \mathbf{-8} \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} -2\,\text{I}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & \mathbf{-4} \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & \mathbf{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Permutation}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{6} \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & \mathbf{-5} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & \mathbf{-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{negieren}]{\text{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{6} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \mathbf{5} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \mathbf{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} .$$

Teil a): Da es drei Stufen in der ZSF gibt, ist $\operatorname{rg}(A) = 3$ und somit $\dim(L(A;0)) = 5 - 3 = 2$.

Teil b): Die letzte Nicht-Stufe befindet sich bei $j = 5$ und die letzte Stufe bei $j = 3$, also ist der Ansatz für den ersten Lösungsvektor des homogenensystems $v = (v_1, v_2, v_3, 0, 1)$ mit freiem $v_3 \in \mathbb{R}$.

- Die dritte Zeile der ZSF ergibt $0v_1 + 0v_2 + 2v_3 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$, also $v_3 = 0$.
- Die Einsetzung von $v = (v_1, v_2, 0, 0, 1)$ in der zweiten Zeile der ZSF ergibt $0v_1 + 1v_2 + 2 \cdot 0 + 0 + 0 = 0$, also auch $v_2 = 0$.
- Die Einsetzung von $v = (v_1, 0, 0, 0, 1)$ in die erste Zeile der ZSF ergibt $v_1 = -1$.

$\Rightarrow \quad v = (-1, 0, 0, 0, 1)$.

Die nächste Nicht-Stufe ist $j = 4$, also ist der Ansatz für den zweiten Lösungsvektor des homogenen Systems $w = (w_1, w_2, w_3, 1, 0)$.

- Die dritte Zeile der ZSF ergibt $0w_1 + 0w_2 + 2w_3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$, also $w_3 = 0$.
- Die Einsetzung von $v = (w_1, w_2, 0, 1, 0)$ in der zweiten Zeile der ZSF ergibt $0w_1 + 1w_2 + 2 \cdot 0 + 0 + 0 = 0$, also auch $w_2 = 0$.
- Die Einsetzung von $v = (w_1, 0, 0, 1, 0)$ in die erste Zeile der ZSF ergibt $w_1 = -2$.

$\Rightarrow \quad v = (-2, 0, 0, 1, 0)$.

Der homogene Lösungsraum ist also

$$L(A;0) \;=\; \langle\, v, w \,\rangle \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Zu Teil c): Der Ansatz für die spezielle Lösung ist $x = (x_1, x_2, x_3, 0, 0)$.

- Die dritte Zeile der ZSF ergibt $0x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 4$, also $x_3 = 2$.
- Die Einsetzung von $v = (x_1, x_2, 2, 0, 0)$ in der zweiten Zeile der ZSF ergibt $0x_1 + 1x_2 + 2 \cdot 2 + 0 + 0 = 5$, also $x_2 = 1$.
- Die Einsetzung von $v = (x_1, 1, 2, 0, 0)$ in die erste Zeile der ZSF ergibt $x_1 = 3$.

$\Rightarrow \quad x = (3, 1, 2, 0, 0)$.

Zu Teil d): Die allgemeine Lösung ist

$$L(A;b) \;=\; x + \langle\, v, w \,\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Zu Teil e): Die Stufen des Systems sind $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ und $j_3 = 3$, also bilden die ersten drei Spalten von A eine Basis des Spaltenraums:

$$\text{Spaltenraum}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Aus den Vektoren von Teil (b) liest man die Darstellung der zwei Nichtstufen-Spalten ab: man entfernt die Eins, und dreht das Vorzeichen um

$$v = (-1, 0, 0, 0, 1) \Rightarrow (1, 0, 0, 0, 0) \Rightarrow a^5 = 1 \cdot a_1 ,$$

sowie

$$w = (-2, 0, 0, 1, 0) \Rightarrow (2, 0, 0, 0, 0) \Rightarrow a^4 = 2 \cdot a_1 .$$

Diese Darstellung kann man natürlich auch an der Matrix A ablesen.

Zu Teil f): Einen solchen Vektor findet man, indem man eine Nicht-Lösung c' für die ZSF angibt, und die Umformungen $A \to A'$ auf diesem Vektor wieder rückgängig macht. Ein solcher Vektor ist beispielsweise $c' = (0, 0, 0, 1)$, da die letzte Zeile der ZSF nur Nullen enthält. Rückgängigmachung aller Umformungen auf diesem Vektor ergibt $c = (0, 0, 1, 0)$ da nur die Permutation die Eins betrifft. Damit ist das System

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

unlösbar.

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 5 2 Punkte

(a) Geben Sie die Leibniz-Darstellung der Determinante $\det : M(n \times n, K) \to K$ an.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Leibniz-Darstellung: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für $\lambda \in K$.

Lösung

Zu a): Die Leibniz-Darstellung der Determinante einer Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ ist

$$\det(A) \;=\; \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} \,,$$

wobei die Permutation π über alle Permutationen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ läuft.

Zu b): Multipliziert man A mit λ , so werden alle Komponenten von A mit λ multipliziert, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}\det(\lambda A) \;&=\; \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^{n} (\lambda a_{i,\pi(i)}) \;=\; \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\pi) \lambda^n \prod_{j=1}^{n} a_{i,\pi(i)} \\ &=\; \lambda^n \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^{n} a_{i,\pi(i)} \;=\; \lambda^n \det(A)\,.\end{aligned}$$

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 6 3 Punkte

Berechnen Sie für gerades $n \geq 2$ die Determinante von

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R}) .$$

Lösung

Es sei $n \geq 4$, dann ergibt zweimalige Laplace-Entwicklung nach der letzten Zeile

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \det(A_{n-1}) = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^n \cdot \det(A_{n-2}) = -\det(A_{n-2}) .$$

Die Erhöhung von n um Zwei dreht also das Vorzeichen der Determinante um. Andererseits ist $\det(A_2) = -1$, woraus per Induktion $\det(A_n) = (-1)^{\frac{n}{2}}$ folgt.

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 7 3 Punkte

(a) Was ist ein Eigenwert eines Endomorphismus $f: V \to V$ (V endlichdimensional)?

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte des Endomorphismus $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = (x, y+2x, z+y+x) .$$

Lösung

Zu a): Ein Eigenwert eines Endomorphismus f ist ein $\lambda \in K$, so dass $f(x) = \lambda x$ für ein $x \neq 0$ aus V gilt.

Zu b): In Matrixschreibweise ist

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad A = {}_{\underline{e}}^{\underline{e}}M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte von f stimmen mit den Eigenwerten von A überein. Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{\text{Dreieck}}{=} (1-\lambda)^3 .$$

Folglich hat die Matrix und damit f nur den Eigenwert $\lambda = 1$.

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 8 4 Punkte

Es sei $p(X)$ ein Polynom über K. Zeigen Sie: Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $A \in M(n \times n, K)$, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert der Matrix $p(A)$.

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für Monome $p(X) = X^n$.

Lösung

Es sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, dann gilt $Av = \lambda v$ für ein $v \neq 0$ aus dem Vektorraum $V = K^n$. Für die Matrix A^n gilt dann

$$A^n v \;=\; A^{n-1} \cdot (Av) \underset{\text{Eigenwert}}{=} A^{n-1}(\lambda v) \;=\; \lambda(A^{n-1}v) \;=\; \cdots \;=\; \lambda^n v\,.$$

Also: Ist λ Eigenwert von A, so ist λ^n Eigenwert von A^n.

Ist nun $p(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$ ein beliebiges Polynom, so ist $p(A) = a_0 E_n + a_1 A + \cdots + a_m A^m$. Anwendung auf den Eigenvektor v von A ergibt

$$\begin{aligned} p(A)v &= (a_0 E_n + a_1 A + \cdots + a_m A^m)v \;=\; a_0 E_n v + a_1 A v + \cdots + a_m A^m v \\ &= a_0 v + a_1 \lambda v + \cdots + a_m \lambda^m v \;=\; (a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_m \lambda^m)v \;=\; p(\lambda)v\,. \end{aligned}$$

Damit besitzt die Matrix $p(A) \in M(n \times n, K)$ den Eigenwert $p(\lambda) \in K$.

Lineare Algebra I

- Testklausur II - 4. Juli 2008

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 9 3 Punkte

Es sei $A \in M(n \times n, K)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Es gilt $\det(A) = 0$.

(2) Es gibt $0 \neq B \in M(n \times n, K)$ mit $A \cdot B = 0$.

(3) Es gibt $0 \neq C \in M(n \times n, K)$ mit $C \cdot A = 0$.

Lösung

Richtung $(1) \Leftrightarrow (2)$:

Die Aussage $\det(A) = 0$ bedeutet, dass die *Spalten* $a^1, \dots, a^n$ von A linear abhängig sind, es gibt also Koeffizienten $\beta_1, \dots, \beta_n$ mit $\sum \beta_j a^j = 0$, und die β_j sind nicht alle Null. Damit ist $A \cdot B = 0$ für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

die nicht die Nullmatrix ist. Wir müssen noch die Umkehrung zeigen: Angenommen $AB = 0$ für $B \neq 0$, und $\det(A) \neq 0$. Dann folgt nach Multiplikation mit A^{-1} von links (darf man da $\det(A) \neq 0$ bedeutet, dass A regulär ist), die Gleichung $B = 0$, ein Widerspruch. Also war $\det(A) = 0$, und auch die Rückrichtung ist gezeigt.

Richtung $(1) \Leftrightarrow (3)$:

Die Aussage $\det(A) = 0$ bedeutet, dass die *Zeilen* $a_1, \dots, a_n$ von A linear abhängig sind, es gibt also Koeffizienten $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ mit $\sum \gamma_i a_i = 0$, und die γ_i sind nicht alle Null. Damit ist $C \cdot A = 0$ für die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

die nicht die Nullmatrix ist. Wir müssen noch die Umkehrung zeigen: Angenommen $CA = 0$ für $C \neq 0$, und $\det(A) \neq 0$. Dann folgt nach Multiplikation mit A^{-1} von rechts (darf man da $\det(A) \neq 0$ bedeutet, dass A regulär ist), die Gleichung $C = 0$, ein Widerspruch. Also war $\det(A) = 0$, und auch die Rückrichtung ist gezeigt.

Damit folgt insgesamt $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$.