LÖSUNGSHINWEISE ZU BLATT 10

Aufgabe 1

Berechnung des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A-\lambda E_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2+(-2+\lambda)(-1-\lambda)) & 1-\lambda \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 2\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Laplace}}{=} -\begin{vmatrix} -2+(-2+\lambda)(-1-\lambda)) & 1-\lambda \\ 2\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)\begin{vmatrix} -2+(-2+\lambda)(-1-\lambda)) & 1 \\ 2\lambda & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(1-\lambda)\cdot(-2+(-2+\lambda)(-1-\lambda)-2\lambda) = \lambda\cdot(1-\lambda)\cdot(1+\lambda)\,.
\end{aligned}$$

Berechnung der Eigenwerte:

Aus der Faktordarstellung des Polynoms liest man die drei Nullstellen $\lambda = 0, 1, -1$ ab, sie bilden die Eigenwerte von A bzw. f.

Berechnung der Eigenräume:

Der Eigenraum U_0 zum Eigenwert $\lambda = 0$ ist der Kern von $A - 0 \cdot E_3$, also der Kern von f bzw. A, wir haben also das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ zu lösen mit $U_0 = L(A; 0)$. Wir bringen die Matrix auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben 2 Stufen und damit $\mathrm{rg}(A) = 2$, d. h. es gibt $3 - 2 = 1$ Basisvektoren für $L(A; 0)$. Die erste Nicht-Stufe ist bei $j = 2$, der Ansatz für den Basisvektor ist also $u_0 = (\lambda, 1, 0)$, und wir erhalten $u_0 = (1, 1, 0)^t$. Der erste gesuchte Eigenraum ist also

$$U_0 = \mathrm{Kern}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 1$ ist der Kern von $A - 1E_3$, also lösen wir das LGS $(A - E_3)x = 0$. Die Zeilenstufenform von $A - E_3$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier ist $\mathrm{rg}(A - E_3) = 2$, es gibt wieder nur einen Basisvektor, den man aus der ZSF abliest: $u_1 = (1, 0, 1)^t$. Es ist also

$$U_1 = \mathrm{Kern}(A - E_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = -1$ ist der Kern von $A + E_3$, also lösen wir das LGS $(A + E_3)x = 0$.

Die Zeilenstufenform von $A + E_3$ ist

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier liest man den Lösungsvektor $u_{-1} = (1,1,1)^t$ ab, also ist

$$U_{-1} \; = \; \mathrm{Kern}(A + E_3) \; = \; \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

<u>Basis aus Eigenvektoren:</u>
Eine Basis aus Eigenvektoren ist offenbar

$$\underline{u} \; = \; \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) .$$

<u>Diagonalisierung von A:</u>
Die Darstellungsmatrix von f bzgl. $\underline{u}$ ist diagonal, denn jedes $u \in \underline{u}$ ist ein Eigenvektor. Nach dem Transformationssatz ist

$$D \; = \; \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \; = \; {}^{\underline{u}}_{\underline{u}}M(f) \; = \; S \cdot A \cdot S^{-1} \;\text{ mit }\; S \; = \; {}^{\underline{e}}_{\underline{u}}M(\mathrm{id})\,.$$

Es ist einfacher, mit der Matrix

$$S^{-1} \; = \; {}^{\underline{u}}_{\underline{e}}M(\mathrm{id}) \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

zu starten. Ihr Inverses erhält man über das Invertierungsverfahren:

$$S \; = \; (S^{-1})^{-1} \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>**Aufgabe 2:**</u>
In der Rechnungen von Aufgabe 1 wurden nur Ringoperationen (Addition, Multiplikation, Negierung) benutzt, es treten nirgends Brüche auf, alle Werte und Einträge sind ganze Zahlen, die Rechnungen spielen sich daher im Ring $\mathbb{Z}$ ab. Die Zuordnung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\mathbb{Z}3$, $a \mapsto \bar{a}$ einer ganzen Zahl zu ihrer Restklasse modulo 3 ist verträglich mit Addition und Multiplikation (vgl. erstes Übungsblatt). Alle Rechnung bleiben also richtig, wenn man über jede Komponente den Klassenstrich zieht. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix}$$

entsteht aus der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

der vorigen Aufgabe durch Einsetzen der Klassenstriche mit $\overline{-2} = \bar{1}$ bzw. $\overline{-1} = 2$. Ihr charakteristisches Polynom über $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}3$ ist

$$\overline{p(\lambda)} \; = \; \overline{\lambda \cdot (1 - \lambda) \cdot (1 + \lambda)} \; = \; \lambda \cdot (\bar{1} - \lambda) \cdot (\bar{1} + \lambda)$$

nun mit den Nullstellen $\lambda = \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ über $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}3$. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$U_{\bar{0}} = \left\langle \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\rangle , \ U_{\bar{1}} = \left\langle \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\rangle , \ U_{\bar{2}} = \left\langle \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\rangle , \ \underline{u} = \left(\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right) ,$$

und wir erhalten die Diagonalisierung

$$D = \begin{pmatrix} \bar{0} & & \\ & \bar{1} & \\ & & \bar{2} \end{pmatrix} = S \cdot A \cdot S^{-1} \text{ mit } S = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} ,$$

wobei diese Matrix aus der S-Matrix der vorigen Aufgabe durch Anwendung der Klassenstriche entsteht.

Aufgabe 3:

Teil (a) löst man durch Induktion: Für $k = 0$ ist die Aussage richtig: $A^0 = E$ wird durch S diagonalisiert, denn $SES^{-1} = E$ ist diagonal. Angenommen man nimmt die Behauptung für A^k an: $SA^kS^{-1} = D$ diagonal, dann ist

$$SA^{k+1}AS^{-1} = SA^k \underbrace{S^{-1}S}_{=E} AS^{-1} = D \cdot D' = \text{diagonal}$$

da das Produkt von zwei Diagonalmatrizen wieder diagonal ist. Damit gilt die Behauptung für alle $k \in \mathbb{N}_0$: jede Potenz von A wird durch S diagonalisiert, aber ggf. zu verschiedenen Diagonalmatrizen.

Teil (b): Wir müssen zeigen, dass $D = SA^{-1}S^{-1}$ diagonal ist. Die Matrix D ist invertierbar, da S und A invertierbar sind. Es folgt, dass $D^{-1} = (SA^{-1}S^{-1})^{-1} = SAS^{-1}$ nach Voraussetzung diagonal ist. Dann ist aber auch D diagonal mit inversen Einträgen auf der Diagonalen.

Teil (c): Ist $p(X) = \sum a_j X^j$ ein Polynom, so folgt $p(A) = \sum a_j A^j$ mit $A^{=}E$, und es ist

$$S \cdot p(A) \cdot S^{-1} = S \left(\sum a_j A^j \right) S^{-1} = \sum a_j \left(SA^jS^{-1} \right) = \sum a_j D_j$$

mit Matrizen $D_j = SA^jS^{-1}$, die nach Teil (a) diagonal sind. Damit ist $Sp(A)S^{-1}$ als Summe von Diagonalmatrizen selbst diagonal.

Aufgabe 4:

Hier benutzt man, dass A diagonalisierbar ist: $D = SAS^{-1}$ mit geeignetem $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Dann ist die Partialsumme

$$S \cdot (A^0 + A^1 + \cdots + A^m) \cdot S^{-1} = D^0 + D^1 + \cdots + D^m$$

nach der vorigen Aufgabe stets diagonal. Dabei ist

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} , \ D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} ,$$

mit den (nicht notwendig voneinander verschiedenen) Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A.

Teil (a): Angenommen $r > 1$, d. h. es gibt einen Eigenwert $\lambda_j \in \mathbb{C}$ von A mit $|\lambda_j| > 1$. Dann gilt für die m-te Partialsumme $P_m = A^0 + \cdots + A^m$

$$SP_mS^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} , \ \alpha_j = \sum_{k=0}^{m} \lambda_j^k .$$

Wegen $|\lambda_j^k| \to \infty$ kann die Matrizenfolge SP_mS^{-1} nicht konvergieren, damit auch P_m nicht (sonst würde SP_mS^{-1} als Kombination von endlichen Summen und Produkten von den Einträgen aus P_m auch konvergieren).

Teil (b): Im Fall $r < 1$ ist die Folge der Partialsummen

$$SP_mS^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \;,\;\; \alpha_j \;=\; \sum_{k=0}^{m} \lambda_j^k \;.$$

konvergent, denn wegen $|\lambda_j| < 1$ für $j = 1 \ldots n$ sind die geometrischen Zahlenreihen α_j jeweils konvergent. Damit konvergieren auch die Einträge von $A^0 + \cdots + A^m$, da sie jeweils endliche Linearkombinationen der α_j sind (die Matrix S ist fest).

Teil (c): Das beweist man analog zum Reihenwert der geometrischen Zahlenreihe. Man untersucht die Folge

$$(E - A) \cdot P_m \;=\; \sum_{k=0}^{m} A^k - \sum_{k=1}^{m+1} A^k \;.$$

Die linke Teilsumme konvergiert gegen irgend eine Matrix

$$M \;=\; \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} A^k$$

nach Teil (a). Die rechte Teilsumme

$$\sum_{k=1}^{m+1} A^k \;=\; -E + \sum_{k=0}^{m+1} A^k$$

konvergiert dann gegen $-E+M$. Damit konvergiert die Summe der beiden Reihen gegen die Einheitsmatrx E, also $(E - A)M = E$ und damit $M^{-1} = E - A$. Es gilt also wie in der Analysis

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k \;=\; (E - A)^{-1} \;.$$