Übungen zur Vorlesung Algebra 2

Institut für Reine Mathematik SS 08 – Blatt 03

Abgabetermin: Donnerstag 29.05.2008 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

Definition: Eine Folge von Gruppen bzw A-Moduln mit Homomorphismen

$$M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$$

mit $\psi \circ \varphi$ heißt *exakt*, wenn der Kern von ψ gleich dem Bild von φ ist.

1. Es sei eine exakte Folge von A-Moduln

   $$M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$$

   mit $\psi \circ \varphi$ gegeben. Zeigen Sie: Ist $S \subset A$ eine Nennermenge, so ist auch

   $$S^{-1}M_1 \xrightarrow{S^{-1}\varphi} S^{-1}M_2 \xrightarrow{S^{-1}\psi} S^{-1}M_3$$

   exakt.

2. Man nennt eine Nennermenge S saturiert, wenn $xy \in S \Longleftrightarrow x \in S$ und $y \in S$ gilt. Zeigen Sie:

   (a) S ist genau dann saturiert, wenn $A - S$ eine Vereinigung von Primidealen ist.

   (b) Wenn S eine Nennermenge ist, so existiert eine kleinste saturierte Nennermenge $\overline{S}$, die S enthält. Es ist $\overline{S}$ das Komplement in A von der Vereinigung aller Primideale, die nicht S treffen.

3. Es sei $S \subset T \subset A$ Nennermengen und $\phi : S^{-1}A \to T^{-1}A$; $a/s \mapsto a/s$ die kanonische Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) ϕ ist bijektiv.

   (b) Für jedes $t \in T$ ist $t/1$ invertierbar in $S^{-1}A$.

   (c) Für jedes $t \in T$ existiert ein $x \in A$ mit $xt \in S$.

   (d) $T \subset \overline{S}$.

   (e) Jedes Primideal, das T trifft, trifft auch S.

4. Es sei $S \subset T \subset A$ Nennermengen und es sei M ein A-Modul.

   (a) Es sei $\iota : M \to S^{-1}M$ die kanonische Abbildung. Zeigen Sie:

   $$\mathrm{Ker}(\iota) = \{m \in M \ ; \ \text{es gibt } s \in S \text{ mit } sm = 0\}$$

   (b) Es gibt eine kanonische Abbildung $\phi : S^{-1}M \to T^{-1}M$; $m/s \mapsto m/s$. Zeigen Sie, dass ϕ bijektiv ist, wenn $T \subset \overline{S}$ gilt.