Übungen zur Vorlesung Algebra 2

Institut für Reine Mathematik SS 08 – Blatt 05

Abgabetermin: Donnerstag 12.06.2008 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Zeigen Sie
   (a) Die ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ sind $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \cong \mathbb{Z}[T]/(T^2+5)$.
   (b) Die Ideale $(2, \sqrt{-5}+1)$ bzw. $(3, \sqrt{-5}+1)$ von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sind prim.
   (c) Zerlegen Sie das Ideal $2 \cdot \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ in Primidealpotenzen.
   (d) Zerlegen Sie das Ideal $6 \cdot \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ in Primidealpotenzen.
   (e) Bestimmen Sie die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

2. Es sei A ein Dedekindring und $M \subset Q(A)$ ein gebrochenes Ideal. Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung
$$(A : M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, A) \ , \ \ x \longmapsto \mu_x$$
ein Isomorphismus ist, wobei $\mu_x : M \to A$ die Multiplikation mit x ist.

3. Es Sei K ein Zahlkörper, $\mathcal{O}_K$ der zugehörige Ganzheitsring. Sei weiter $K/\mathbb{Q}$ galoisch. Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl mit Zerlegung
$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_r^{e_r}$$
in $\mathcal{O}_K$.
   (a) Zeigen Sie: Die Galoisgruppe $G := G(K/\mathbb{Q})$ operiert auf der Menge der Primideale $\{\mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_r\}$, wobei $\sigma(\mathfrak{P}) := \{\sigma(a), a \in \mathfrak{P}\}$.
   (b) Zeigen Sie: Die Operation aus (a) ist transitiv; d.h. für alle i, j existiert ein $\sigma \in G$, so dass $\sigma(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{P}_j$.
   Hinweis: Nehmen Sie an, dass $\sigma(\mathfrak{P}_2) \neq \mathfrak{P}_1$ für alle σ . Zeigen Sie: Es existiert ein $x \in \mathfrak{P}_1$, $x \notin \sigma(\mathfrak{P}_2)$ für alle σ . Betrachten Sie dann die Norm von x .
   (c) Zeigen Sie, dass $D(\mathfrak{P}) := \{\sigma \in G \ ; \ \sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\}$ eine Untergruppe von G ist. Man nennt $D(\mathfrak{P})$ die Zerlegungsgruppe. Es ist $\#(G/D(\mathfrak{P}))$ die Anzahl der Primideale über $p\mathbb{Z}$.