Übungen zur Vorlesung Algebra 2

Institut für Reine Mathematik SS 08 – Blatt 06

Abgabetermin: Donnerstag 19.06.2008 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Sei k ein Körper. Sei
$$k[[X]] := \left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \ ; \ a_k \in k\right\}$$
der Ring der formalen Potenzreihen. Für $k = \mathbb{C}$ sei
$$\mathbb{C}\{z\} := \{f \in \mathbb{C}[[z]] \ ; \ f \text{ konvergiert in einer Umgebung um } 0\}.$$
der Ring der konvergenten Potenzreihen in einer Umgebung der Null. Zeigen Sie:

   (a) $k[[X]]$ ist ein diskreter Bewertungsring.
   (b) $\mathbb{C}\{z\}$ ist ein diskreter Bewertungsring.

   Wie sieht jeweils die Bewertung bzw. das maximale Ideal aus?

2. Sei K ein Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O} := \mathcal{O}_K$. Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl mit Zerlegung
$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_r^{e_r}$$
in $\mathcal{O}_K$. Sei $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_1}$ die Lokalisierung von $\mathcal{O}$ nach $\mathfrak{P}_1$; dies ist ein diskreter Bewertungsring mit Bewertung $v_{\mathfrak{P}_1}$.

   (a) Zeigen Sie: $v_{\mathfrak{P}_1}(p) = e_1$.
   (b) Zeigen Sie: Definiert man
$$\bar{v}_{\mathfrak{P}_1} := \frac{1}{e} \cdot v_{\mathfrak{P}_1} : K^* \to \frac{1}{e} \cdot \mathbb{Z},$$
   so ist $\bar{v}_{\mathfrak{P}_1}$ eine Fortsetzung der Bewertung
$$v_p : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z}; \quad \frac{a}{b}p^r \mapsto r, \text{ falls } 1 = \mathrm{ggT}(a,p) = \mathrm{ggT}(b,p)$$

3. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann definiert f eine Abbildung
$$f^* : \mathbb{C}\{z\} \to \mathbb{C}\{z\}; \quad h \mapsto h \circ f.$$
Bestimmen Sie e mit $(f^*(z)) = \mathfrak{m}^e$, wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $\mathbb{C}\{z\}$ ist.

4. Sei K ein Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$. Sei weiter $K/\mathbb{Q}$ galoisch. Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl mit Zerlegung
$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_r^{e_r}$$
in $\mathcal{O}_K$. Wie in Aufgabe 3, Blatt 5 sei $D(\mathfrak{P}_i) := \{\sigma \in G \ ; \ \sigma(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{P}_i\}$ die Zerlegungsgruppe.

   (a) Es seien $k := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ bzw. $k' := \mathcal{O}_K/\mathfrak{P}_i$ die Restklassenkörper. Zeigen Sie: Es existiert ein kanonischer Gruppenmorphismus
$$D(\mathfrak{P}_i) \longrightarrow \mathrm{Aut}(k'/k)$$
   hat. Der Kern dieser Abbildung heißt Trägheitsgruppe (*Inertia group*) und wird mit $I(\mathfrak{P}_i)$ bezeichnet.
   (b) Zeigen Sie, dass die Abbildung aus (a) surjektiv ist.
   Somit gilt $D(\mathfrak{P}_i)/I(\mathfrak{P}_i) \cong G(k'/k)$.