Übungen zur Vorlesung Algebra 2

Institut für Reine Mathematik SS 08 – Blatt 07

Abgabetermin: Donnerstag 26.06.2008 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Geben Sie für die folgenden Ideale von $\mathcal{O}_K$ eine Basis des entsprechenden Gitters an, und berechnen Sie jeweils das Volumen der Grundmasche, sowie Norm und Diskriminante:
$$\mathcal{O}_K, \quad (3), \quad (3, 1+\sqrt{-5}), \quad (2), \quad (2, 1+\sqrt{-5}).$$

2. Sei nun $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Benutzen Sie ohne Beweis, dass $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.
   (a) Berechnen Sie die Norm bzw. Spur eines allgemeinen Elementes $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$.
   (b) Geben Sie nun eine Basis des Gitters zu $\mathcal{O}_K$ an und berechnen Sie das Volumen der entsprechenden Grundmasche bzw. die Diskriminante.

3. Sei K ein Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$. Sei weiter $K/\mathbb{Q}$ galoisch. Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl mit Zerlegung
$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_r^{e_r}$$
in $\mathcal{O}_K$. Es sei $f_i := [\mathcal{O}_K/\mathfrak{P}_i : \mathbb{Z}/\mathfrak{p}]$ der Grad der Restklassenkörpererweiterung.
   (a) Zeigen Sie: $e_1 = \cdots = e_r =: e$
   (b) Zeigen Sie: $f_1 = \cdots = f_r =: f$
   (c) Zeigen Sie: $[K : \mathbb{Q}] = efr$.

   Dies gilt allgemein für Erweiterungen von Ganzheitsringen in Galois-Erweiterungen!

4. Sei $K/\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$, und sei $\mathfrak{P}$ ein Ideal von $\mathcal{O}$. Wir wollen zeigen:
$$N(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}^f,$$
wobei $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap \mathbb{Z}$ und $f := [\mathcal{O}/\mathfrak{P} : \mathbb{Z}/\mathfrak{p}]$ der Grad der Restklassenkörpererweiterung ist.
In (a) und (b) sei zunächst $K/\mathbb{Q}$ normal, damit galoisch.
   (a) Zeigen Sie zunächst: $N(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}^h$ für ein $h > 0$.
   (b) Sei nun $\mathcal{O}'$ der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$ in K . Dann sind $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{P}$ Hauptideale in $\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$ bzw. $\mathcal{O}'$; etwa $\mathfrak{P} = \pi\mathcal{O}'$. Zeigen Sie die Behauptung, indem Sie das Ideal $N(\pi)\mathcal{O}' = N(\mathfrak{P})$ betrachten. Benutzen Sie dazu Aufgabe 3.
   (c) Sei jetzt L/K eine endliche Erweiterung, so dass $L/\mathbb{Q}$ normal ist. Wenden Sie Teil (b) auf $L/\mathbb{Q}$ bzw. L/K an. Benutzen Sie anschließend die Transitivität der Norm und die Multiplikativität des relativen Grades[1]

---

[1] Ist $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}''$ eine Erweiterung von Dedekindringen, und $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}''$ ein Primideal. Dann gilt:
$$[\mathcal{O}''/\mathfrak{P} : \mathcal{O}/(\mathfrak{P} \cap \mathcal{O})] = [\mathcal{O}''/\mathfrak{P} : \mathcal{O}'/(\mathfrak{P} \cap \mathcal{O}')] \cdot [\mathcal{O}'/(\mathfrak{P} \cap \mathcal{O}') : \mathcal{O}/(\mathfrak{P} \cap \mathcal{O})]$$