Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Wiederholung

Auswahl von Aufgaben für die Klausur am Mittwoch 7. Februar 8.15 - 10.00 Uhr

---

1. Was besagen die drei Aussagen der Sylowsätze?
   Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung $p \cdot q$ mit Primzahlen p und q , $p \neq q$ eine nicht-triviale normale Sylowgruppe besitzt.

2. Was besagt der Satz von Lagrange?
   Es sei G eine Gruppe, $G \neq \{e\}$. Enthält G nur die trivialen Untergruppen, so ist G isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$.

3. Was besagt der chinesische Restsatz?
   Es sei $N \geq 2$ eine natürliche Zahl und es sei $N = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$ ihre Primfaktorzerlegung. Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung

   $$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}N \longrightarrow \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p_1^{r_1} \times \dots \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p_n^{r_n}, \quad x \mapsto (x \mod p_1^{r_1}, \dots, x \mod p_n^{r_n}),$$

   ein Isomorphismus von Gruppen ist.

4. Bringen Sie die Matrix $M := \begin{pmatrix} -4 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 2 \\ 7 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ mittels Zeilen- und Spaltenumformungen auf Elementarteilergestalt, d.h. auf Diagonalgestalt, so dass sich die Diagonalelemente m_1, m_2, m_3 sukzessiv teilen; also $m_1 | m_2$ und $m_2 | m_3$.

5. Es sei $M \in M(n, \mathbb{Z})$ eine ganzzahlige Matrix mit vollem Rang und es sei φ der Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$; $x \mapsto Mx$. Zeigen Sie:

   $$\operatorname{card}\left(\mathbb{Z}^n/\varphi\left(\mathbb{Z}^n\right)\right) = |\det(M)| \quad .$$

6. Was besagt der Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen?
   Welche der folgenden Gruppen sind zueinander isomorph?

   (a) $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 120$
   (b) $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 15 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 8$
   (c) $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 3 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 20 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 2$
   (d) $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 40 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 3$
   (e) $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 3 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 5 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 4 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 2$

7. Wann ist $R/\mathfrak{a}$ ein Körper, wenn $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal in einem kommutativen Ring ist?
   Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) Jedes Element $0 \neq x \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$ ist invertierbar.
   (b) n ist Primzahl.

8. Was gesagt die Division mit Rest in ganzen Zahlen?
   Benutzen Sie den euklidischen Algorithmus über $\mathbb{Z}$, um das Inverse von $\overline{9}$ in $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}37)^{\times}$ zu berechnen.

9. Bestimmen Sie ein $r \in \mathbb{Z}$ mit

$$r \equiv 1 \mod 2, \quad r \equiv 2 \mod 9, \quad r \equiv 3 \mod 5, \quad r \equiv 5 \mod 11$$

10. Was besagt die Division mit Rest im Polynomring?
Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$:

$$f := X^3 + X^2 + X - 3 \; ; \; g := X^6 - X^5 + 6X^2 - 13X + 7 \; .$$

11. Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des irreduziblen Polynoms

$$f(T) := T^5 - 4T + 2 \in \mathbb{Q}[T]$$

Berechnen sie das Inverse von $2 + \alpha + \alpha^2 \in \mathbb{Q}[\alpha]$ als Polynom in α .

12. Es seien $f := T^3 + 3T^2 - 2T - 6$ und $g := T^3 - 2T + 4$ Polynome in $\mathbb{Q}[X]$. Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler d von f und g .

13. Was ist der Grad einer Körpererweiterung und was ist das Minimalpolynom?
Es sei K/k eine Körpererweiterung, $f \in k[T]$ mit $\deg(f) \geq 1$ und $\alpha \in K$ eine Nullstelle von f . Zeigen Sie:

$$[k(\alpha) : k] = \deg(f) \Longleftrightarrow f \text{ irreduzibel}$$

14. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ sei $\mathbb{Q}[\alpha] := \{z \in \mathbb{C} \, ; \text{es gibt } f \in \mathbb{Q}[T] \text{ mit } z = f(\alpha)\}$. Zeigen Sie: $\mathbb{Q}[\alpha]$ ist genau dann ein Körper, wenn es ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[T]$ mit $f \neq 0$ und $f(\alpha) = 0$ gibt.

15. Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}] = 3$ gilt. Was ist das delische Problem?

16. - Sei K ein Körper und R ein Integritätsring mit $K \subseteq R$. Zeigen Sie:
Ist $\dim_K R < \infty$, so ist R ein Körper.

17. Es sei $\zeta := \exp(2\pi\imath/7) \in \mathbb{C}$ und $\eta := \exp(2\pi\imath/5) \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie: $\eta \notin \mathbb{Q}(\zeta)$.

18. Es sei α bzw. $\beta \in \mathbb{C}$ Nullstelle eines irreduziblen Polynoms $f \in \mathbb{Q}[T]$ bzw. $g \in \mathbb{Q}[T]$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

    (a) $f \in \mathbb{Q}(\beta)[T]$ ist irreduzibel.

    (b) $g \in \mathbb{Q}(\alpha)[T]$ ist irreduzibel.

19. Es sei $\alpha := \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$ und $\beta := \imath \cdot \alpha \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:
Jeder Körpermorphismus $\varphi : \mathbb{Q}(\alpha, \beta) \to \mathbb{C}$ bildet $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ in sich ab.

20. Es seien $\alpha := \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$ und $\beta := \imath \cdot \alpha \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass man einen Gruppenmorphismus

$$\rho : \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathfrak{S}(\{\alpha, \imath\alpha, -\imath\alpha, -\alpha\})$$

in die Permutationsgruppe der Nullstellen von $T^4 - 2$ hat und dass dieser injektiv ist. Ist ϱ auch surjektiv?

21. Was besagt die Gradgleichung bei endlichen Körpererweiterungen?
Bestimmen Sie den Körpergrad $[\mathbb{Q}(\sqrt[16]{2}, \sqrt[17]{2}) : \mathbb{Q}]$.

22. Was bedeutet es, dass "algebraisch" eine ausgezeichnete Eigenschaft ist?
Begründen Sie, warum $\sqrt[3]{17} + \sqrt[15]{2}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist.

23. Was bedeutet es, dass eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit Zirkel und Lineal aus einer Menge $M \subset \mathbb{C}$ konstruierbar ist.?
Ausgehend von der Menge $M := \{0, 1\}$ konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal die Zahl $(\imath + \sqrt{3}) \cdot (\imath/2 + \sqrt{5})^{-1}$.

24. Kann man mit Zirkel und Lineal aus der Menge $\{0\,,\,1\}$ die Zahl $\sqrt[4]{\sqrt[2]{5} + \sqrt[12]{27}}$ konstruieren.

25. Wann ist eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit Zirkel und Lineal aus einer Menge $M \subset \mathbb{C}$ konstruierbar?
Wann kann man Winkel mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile teilen?

26. Wann ist das regelmäßige n-Eck mit Zirkel und Lineal aus $\{0, 1\}$ konstruierbar?
Kann man mit Zirkel und Lineal aus der Menge $\{0\,,\,1\}$ das regelmäßige 570 Eck konstruieren?