

Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik

WS 06/07 – Blatt 1

Abgabetermin: Dienstag 24.10.2006 um 08:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

Für die folgenden geometrischen Konstruktionen reicht es zu erklären, mit welchen elementaren Konstruktionen man schrittweise zum Ziel kommt.

1. Ausgehend von der Menge $M := \{0, 1\}$ konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal die folgenden Zahlen:
 - (a) $(i + \sqrt{3}) + (i/2 + \sqrt{5})$
 - (b) $(i + \sqrt{3}) \cdot (i/2 + \sqrt{5})$
 - (c) $(i + \sqrt{3}) \cdot (i/2 + \sqrt{5})^{-1}$
2. Es sei $K \subset \mathbb{C}$ ein Unterkörper. Es sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
 - (a) $\dim_K K[z] \leq 2$.
 - (b) Die Menge $\{1, z\}$ ist ein Erzeugendensystem von $K[z]$ als K -Vektorraum.
 - (c) z genügt einer quadratischen Gleichung über K .
3. Es sei $K \subset \mathbb{C}$ ein Unterkörper. Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $\dim_K K[z] \leq 2$. Zeigen Sie, dass man z aus der Menge K mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.
4. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges Fünfeck.
Hinweis: Es sei $\xi := \exp(2\pi i/5)$. Konstruieren Sie zuerst die Zahl $\eta := \xi + \xi^4$, die einer quadratischen Gleichung über \mathbb{Q} genügt.