Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Blatt 2

Abgabetermin: Dienstag 31.10.2006 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ sei
$$\mathbb{Q}[\alpha] := \{z \in \mathbb{C}\, ; \text{es gibt } f \in \mathbb{Q}[T] \text{ mit } z = f(\alpha)\} \ .$$
Zeigen Sie: $\mathbb{Q}[\alpha]$ ist genau dann ein Körper, wenn es ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[T]$ mit $f \neq 0$ und $f(\alpha) = 0$ gibt.

2. Es sei $\alpha = r/s \in \mathbb{Q}$ mit $\mathrm{ggT(r,s)} = 1$ Nullstelle eines *normierten* Polynoms $f(T) \in \mathbb{Z}[T]$ vom Grad $\deg f = n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $\alpha \in \mathbb{Z}$ gilt.

   Hinweis. Zeigen Sie, dass s die Zahl r^n teilen muss und folgern Sie daraus $\alpha \in \mathbb{Z}$.

3. Im Folgenden soll hergeleitet werden, dass ausgehend von der Menge $M := \{0, 1\}$ die neunte Einheitswurzel $\xi := \exp(2\pi\imath/9)$ nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Zeigen Sie:

   (a) $\prod_{\ell=1,2,4,5,7,8} (T - \xi^\ell) \in \mathbb{Q}[T]$ ist ein Polynom in T mit rationalen Koeffizienten und daher gilt $[\mathbb{Q}[\xi] : \mathbb{Q}] \leq 6$.

   (b) Sei $\eta := \xi^3$. Dann gilt $[\mathbb{Q}[\eta] : \mathbb{Q}] = 2$.

   (c) Das Polynom $T^3 - 3T + 1 \in \mathbb{Z}[T]$ hat die Nullstellen
   $$\zeta_1 := \xi + \xi^8 \ , \ \zeta_2 := \xi^2 + \xi^7 \ , \ \zeta_3 := \xi^4 + \xi^5 \ .$$
   Keine dieser Nullstellen liegt in $\mathbb{Q}$. Daher ist $T^3 - 3T + 1$ irreduzibel.

   Hinweis. Benutzen Sie Aufgabe 2.

   (d) Es gilt $[\mathbb{Q}[\zeta_1] : \mathbb{Q}] = 3$ und somit $[\mathbb{Q}[\xi] : \mathbb{Q}] = 6$.

   (e) Das regelmäßige Neuneck kann nicht mit Zirkel und Lineal aus $\{0, 1\}$ konstruiert werden.

   (f) Der Winkel von 60° kann mit Zirkel und Lineal nicht in 3 gleiche Teile geteilt werden.

4. Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}] = 3$ gilt. Daher ist das delische Problem der Würfelverdopplung mit Zirkel und Lineal nicht lösbar.