Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Blatt 3

Abgabetermin: Dienstag 07.11.2006 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Es sei G eine endliche abelsche Gruppe mit Einselement e . Dann gilt:
$$\prod_{g \in G} g^2 = e \ .$$

2. Sei K ein Körper. Zeigen Sie:
   (a) Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ a, b, c \in K \right\} \subset \mathrm{GL}(3, \mathrm{K})$.
   M ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(3, \mathrm{K})$.
   (b) Sei $H := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
   Zeigen Sie, dass H , versehen mit der Matrizenmultiplikation, ein Monoid ist, das unendlich viele linksneutrale Elemente besitzt.

3. Es sei G eine Gruppe mit endlich vielen Elementen und es sei $e \in G$ das neutrale Element. Es sei $g \in G$ ein Element. Zeigen Sie:
   (a) Es existiert eine natürliche Zahl $r \geq 1$ mit $g^r = e$.
   (b) Ist $r \geq 1$ die kleinste Zahl mit $g^r = e$, dann sind $g^1, \ldots, g^r$ paarweise verschieden.
   (c) Die Zahl r teilt die Gruppenordnung $\#G$.

4. Es sei K ein Körper mit endlich vielen Elementen; also $q := \#K$. Zeigen Sie: $x^q = x$ für jedes Element $x \in K$.