Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Blatt 4

Abgabetermin: Dienstag 14.11.2006 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Es sei G eine Gruppe, $G \neq \{e\}$. Enthält G nur die trivialen Untergruppen, so ist G isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$.

2. Es sei $(G, +)$ eine kommutative Gruppe und $T(G)$ die Menge aller Elemente endlicher Ordnung von G; dabei heißt ein Element $g \in G$ von endlicher Ordnung, wenn $ng = 0$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt. Eine Gruppe G heißt torsionsfrei, wenn $T(G) = \{0\}$ gilt. Zeigen Sie

   (a) $T(G)$ ist eine Untergruppe von G. Diese nennt man *Torsionsuntergruppe.*

   (b) Die Gruppe $G/T(G)$ ist torsionsfrei.

3. Es sei G eine Gruppe. Für $a, b \in G$ heißt $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ der *Kommutator von* a, b. Die von $\{ [a, b] : a, b \in G \}$ erzeugte Untergruppe von G wird mit $[G, G]$ bezeichnet und heißt *Kommutatorgruppe von* G. Zeigen Sie:

   (a) $[G, G] = \{ [a_1, b_1] \cdot \ldots \cdot [a_r, b_r] : r \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in G \}$.

   (b) $[G, G]$ ist ein Normalteiler von G und $G/[G, G]$ ist kommutativ.

   (c) Sei $\pi : G \to G/[G, G]$ der kanonische Epimorphismus. Dann erfüllt $G/[G, G]$ die folgende universelle Eigenschaft:
   Ist $\varphi : G \to G'$ ein Homomorphismus von G in eine kommutative Gruppe G', so existiert genau ein Homomorphismus $\overline{\varphi} : G/[G, G] \to G'$ mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$.

4. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $d_n \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ die Drehung im Nullpunkt um den Winkel $2\pi/n$ sowie s die Spiegelung an der y-Achse. Die *Diedergruppe* D_n ist die von d_n und s erzeugte Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

   (a) Zeigen Sie: D_n besteht aus folgenden $2n$ verschiedenen Elementen:
   $$D_n = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, \mathrm{d_n}, \mathrm{d_n^2}, \ldots, \mathrm{d_n^{n-1}}, \mathrm{s}, \mathrm{sd_n}, \ldots, \mathrm{sd_n^{n-1}} \}$$

   (b) Zeigen Sie: $\langle d_n \rangle$ ist ein Normalteiler in D_n und $D_n/\langle d_n \rangle$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   (c) Bestimmen Sie alle Normalteiler von D_n.