Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Blatt 5

Abgabetermin: Dienstag 21.11.2006 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Es sei $N \geq 2$ eine natürliche Zahl mit der Primfaktorzerlegung $N = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$. Die kanonische Abbildung

$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}N \longrightarrow \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p_1^{r_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p_n^{r_n}, \quad x \mapsto (x \mod p_1^{r_1}, \ldots, x \mod p_n^{r_n}),$$

ist ein Isomorphismus von Gruppen. (Hinweis: Mit der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen folgt die Injektivität der Abbildung und dann die Surjektivität durch Vergleich der Kardinalitäten der beiden Mengen.)

2. Sei G eine endliche, kommutative Gruppe mit neutralem Element 0 . Für eine Primzahl p nennt man G eine p-*Gruppe*, falls die Anzahl der Elemente von G eine Potenz von p ist. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ sei

$$G(n) := \{x \in G\,;\, \text{es gibt ein } r \in \mathbb{N} \text{ mit } n^r \cdot x = 0\}\,.$$

   (a) $G(n)$ ist eine Untergruppe von G .
   (b) Für jedes $x \in G(n)$ teilt $\operatorname{ord}(x)$ eine Potenz von n .
   (c) Sind $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ und teilerfremd, so gilt $G(n_1) \cap G(n_2) = \{0\}$.
   (d) Für jedes $x \in G(n)$ gilt $\Big(G(n)/\langle x\rangle\Big)(n) = G(n)/\langle x\rangle$.
   (e) Es gilt $\operatorname{card}(G(n)) \mid n^r$ für ein $r \geq 1$.
   (f) Ist p eine Primzahl, so ist $G(p)$ eine p -Gruppe.

3. Sei G eine endliche, kommutative Gruppe mit neutralem Element 0 . Es seien p eine Primzahl und $r_1, \ldots, r_n$ natürliche Zahlen mit $r_n \geq \ldots \geq r_2 \geq r_1 \geq 1$. Dann heißt G vom Typ $(p^{r_1}, \ldots, p^{r_n})$, wenn $G \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{r_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{r_n}$ gilt.

   (a) Setzt man $G[p^\alpha] := \{x \in G\,;\, p^\alpha \cdot x = 0\}$, so ist $G[p^\alpha]$ eine Untergruppe und es gilt
$$\operatorname{card}(G[p^\alpha]) = \prod_{i=1}^{n} p^{\min\{\alpha, r_i\}} \quad .$$
   (b) Der Typ einer endlichen kommutativen p-Gruppe ist eindeutig bestimmt.

4. Es sei G eine endliche, kommutative Gruppe. Dann ist G isomorph zu einem Produkt zyklischer Gruppen
$$G \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}m_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}m_s \quad ,$$
wobei $m_1, \ldots, m_s$ natürliche Zahlen ≥ 1 sind, die sich sukzessiv teilen.

   (a) Hat G die Kardinalität N und hat N die Zerlegung $N = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}$ in Primzahlpotenzen, so gilt nach 1. und 2.
$$G = G(p_1) \oplus \ldots \oplus G(p_n)$$
   (b) Die Zahlen $(m_1, \ldots, m_s)$ stehen zu den Gruppen $G(p_1), \ldots, G(p_n)$ in eineindeutiger Beziehung.
   (c) Die Zahlen $m_1, \ldots, m_s$ sind eindeutig bestimmt.