Übungen zur Vorlesung Algebra

Institut für Reine Mathematik WS 06/07 – Blatt 6

Abgabetermin: Dienstag 28.11.2006 um 12:15 Uhr vor Beginn der Vorlesung

---

1. Bringen Sie die Matrix $M := \begin{pmatrix} -4 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 2 \\ 7 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ mittels Zeilen- und Spaltenumformungen auf Elementarteilergestalt, d.h. auf Diagonalgestalt, so dass sich die Diagonalelemente m_1, m_2, m_3 sukzessiv teilen; also $m_1 | m_2$ und $m_2 | m_3$.

2. Welche der folgenden Gruppen sind zueinander isomorph?
   (a) $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 120$
   (b) $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 15 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 8$
   (c) $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 3 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 20 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 2$
   (d) $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 40 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 3$
   (e) $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 3 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 5 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 4 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cdot 2$

3. Es sei $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ die Menge der orthogonalen Selbstabbildungen des $\mathbb{R}^3$ mit Determinante $+1$. Betrachten Sie die Wirkung
$$\mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ , \ (S, v) \longmapsto S \cdot v \ .$$
   (a) Bestimmen Sie alle Bahnen von $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.
   (b) Bestimmen Sie den Stabilisator von $v := (0, 0, 1)$.
   (c) Bestimmen Sie den Stabilisator von $v := (1, 1, 1)$.
   (d) Operiert $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ transitiv auf $S^2 := \{v \in \mathbb{R}^3 \ ; \ |v| = 1\}$?

4. Durch Bearbeitung der folgenden Teilaufgaben bestimme man die Anzahl der p-Sylowgruppen von $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$, $q = p^r$, wobei p eine Primzahl ist.
Eine *Flagge* von $\mathbb{F}_q^n$ ist eine Folge von Vektorräumen
$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{F}_q^n$$
mit $V_i \neq V_j$ für $i \neq j$. Auf der Menge X dieser Flaggen $\underline{V}$ operiert G durch
$$g \circ \underline{V} := (g(V_0), \cdots, g(V_n)) \ \text{ für } g \in G \text{ und } \underline{V} \in X \ .$$
   (a) Es ist $\underline{E} := (\langle 0 \rangle, \langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle \ldots, \langle e_1, \ldots, e_n \rangle)$ eine Flagge und ihr Stabilisator $G_{\underline{E}}$ ist die Menge der oberen Dreiecksmatrizen aus G . Die Menge der oberen Dreiecksmatrizen $S_{\underline{E}}$ mit Diagonalelementen 1 ist eine p-Sylowgruppe von G und die einzige von $G_{\underline{E}}$.
   (b) G operiert transitiv auf X . Bestimmen Sie $\mathrm{card}(X)$.
   (c) Der Stabilisator $G_{\underline{V}}$ von $\underline{V}$ bestimmt die Flagge $\underline{V}$ eindeutig.
   (d) Es sei $S_{\underline{V}} < G$ die Menge aller $g \in G$ mit $g \circ \underline{V} = \underline{V}$, so dass g auf V_i/V_{i-1} trivial operiert. $S_{\underline{V}}$ ist eine p-Sylowgruppe von G ist und die einzige von $G_{\underline{V}}$. Weiterhin bestimmt $S_{\underline{V}}$ die Flagge $\underline{V}$ eindeutig.
   (e) Es gilt $g \cdot S_{\underline{V}} \cdot g^{-1} = S_{g\underline{V}}$. Daher ist der Normalisator einer p-Sylowgruppe $S_{\underline{V}}$ gleich der Gruppe $G_{\underline{V}}$.
   (f) Die p-Sylowgruppen korrespondieren bijektiv zu den Flaggen von $\mathbb{F}_q^n$.
   (g) Man bestimme die Anzahl der p-Sylowgruppen von G .